DAVID HILBERT WILHELM ACKERMANN

PRINCIPIILE LOGICII MATEMATICE

Presa Universitară Clujeană

D. HILBERT W. ACKERMANN

PRINCIPIILE LOGICII MATEMATICE

Traducerea de față s-a făcut după volumul
D. Hilbert, W. Ackermann,
Grundzüge der theoretischen Logik,
zweite verbesserte Auflage,
Dover Publications, New York, 1946.

D. HILBERT **W. ACKERMANN**

PRINCIPIILE LOGICII MATEMATICE

Traducere și studiu introductiv: Virgil Drăghici

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2024

Referenţi ştiinţifici:

Prof. univ. dr. Ionel Narița

Lect. univ. dr. Péter-Alpár Gergely

ISBN 978-606-37-2151-9

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruța Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro/

Introducere

Împreună cu celebra D. Hilbert şi P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*[1] lucrarea D. Hilbert şi W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (prima ediţie 1928[2]) reprezintă cercetări fundamentale în domeniul logico-matematic, care au avut un impact considerabil asupra rezultatelor de astăzi.[3]

Orice cititor avizat al textului original al lucrării *Principiile Logicii Matematice* (PLM) va constata însă anumite diferenţe între conceptualizarea din PLM şi cea devenită între timp (cvasi)standard. Întrucât terminologia logico-matematică actuală manifestă un grad mai înalt de precizie şi concizie în raport cu perioada în care textul a fost iniţial elaborat, anumite devieri de la textul original au fost necesare. Acestea privesc atât conceptele fundamentale cât şi unele demonstraţii care, în acord cu criticismul elaborat între timp, s-au arătat a fi incomplete sau chiar greşite.

Toate aceste modificări[4], precum şi o privire de ansamblu asupra conţinutului volumului, sunt consemnate explicit, pe capitole, în studiul introductiv de faţă.

---

[1]Cf. D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin, Verlag von Julius Springer, [1934] (vol. 1), [1939] (vol. 2).

[2]Traducerea de faţă, cu titlul *Principiile Logicii Matematice*, s-a făcut după ediţia a doua revizuită, i.e., D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, zweite, verbesserte Auflage, Dover Publications, New York, 1946.

[3]E.g. S.C. Kleene [1952], *Introduction to Matemathematics*, Amsterdam: North Holland; New York: Van Nostrand; a patra retip. [1964], p. VI.

[4]Traducătorul îşi asumă întreaga responsabilitate pentru intervenţiile în textul original.

Capitolul 1. Calculul propoziţional (Cp)

Calculul propoziţional reprezintă partea cea mai simplă a ceea ce numim logică simbolică sau logică matematică, al cărei obiect îl constituie analiza principalelor concepte sintactice şi semantice proprii acestui nivel de construcţie, e.g., conectori (operatori) logici, funcţii de adevăr, validitate, satisfiabilitate, forme normale, dualitate, axiomatica Cp, consistenţa, independenţa şi completitudinea sistemului axiomatic al Cp.

În mod uzual,[5] prin validitatea unei formule $\mathfrak{A}$ a Cp înţelegem că formula respectivă ia valoarea de adevăr "adevărat" pentru *orice* interpretare (i.e., asignare de valori de adevăr) făcută variabilelor propoziţionale pe care le conţine. De exemplu, dacă $\mathfrak{A}$ este formula $(X\&Y) \rightarrow X$, atunci pentru toate cele patru categorii de asignări făcute variabilelor X şi Y pentru $\mathfrak{A}$ vom obţine valoarea "adevărat". Aşadar, $\mathfrak{A}$ este o formulă *validă*, numită şi *tautologie* sau formulă *logic* adevărată (simbolic: $\models \mathfrak{A}$). Formula $\mathfrak{B} : X \rightarrow Y$, în schimb, nu este una validă, deoarece pentru $X = 1$[6] şi $Y = 0$ $\mathfrak{B}$ este falsă. $\mathfrak{B}$ poate fi însă adevărată pentru celelalte trei categorii de asignări, motiv pentru care se numeşte *satisfiabilă.* În fine $\mathfrak{C} : X\&\overline{X}$ nu poate fi adevărată pentru nicio interpretare făcută lui X; ea este aşadar o formulă întotdeauna falsă, şi este numită *nesatisfiabilă.*

În terminologia din PLM aceste concepte şi conceptele aferente definirii lor sunt redate după cum urmează. Referirile la conceptul "formulă" autorii PLM le fac prin următoarele expresii: "Grundaussage" (formulă/ propoziţie elementară), "Aussagenvariable" (variabilă propoziţională), "Aussagenverknüpfung"/ "Aussagenverbindung"

[5] I.e., în terminologia logico-matematică *actuală.*

[6] Aici şi în cele ce urmează, 1 şi 0, fără alte specificări, înseamnă "adevărat", respectiv "fals".

(combinaţie sau conexiune propoziţională), ”Ausdruck” (expresie), ”logische Grundformeln” (formule logice primitive sau axiome), ”Aussageformel” (formulă propoziţională).[7] Conceptul ”formulă validă” apare redat, echivalent, prin următoarele formulări: ”eine immer richtige Formel” (o formulă întotdeauna adevărată), ”eine allgemeingültige Formel” (o formulă universal validă). Iar conceptul ”formulă nesatisfiabilă” este redat prin expresia ”immer falsche Formel”. Cum intenţia traducerii a fost aceea de a păstra pe cât posibil modul specific de conceptualizare al autorilor germani, n-am recurs la o nivelare (standardizare) a conceptelor de mai sus, motiv pentru care, în traducere, am păstrat formulările menţionate, cu următoarele două excepţii: expresiile ”immer richtige Formel” şi ”immer falsche Formel” au fost redate cel mai adesea prin ”formulă logic adevărată”, respectiv ”formulă logic falsă”.[8]

Câmpul tematic dezvoltat în Cp acoperă esenţial întregul cadru conceptual propriu acestui registru al analizei,[9] concepte tematizate în interrelaţiile lor. Să consemnăm sistematic acest lucru.

1. Conceptul *formelor normale*, cu cele două forme ale sale, forma normală *conjunctivă* (f.n.c.) şi forma normală *disjunctivă* (f.n.d.), este unul central în consideraţiile din PLM. El se bazează pe completitudinea funcţională a mulţimii de operatori formată din conjuncţie (&), disjuncţie ($\vee$) şi negaţie ($^{-}$), numiţi şi operatori booleeni, i.e., pe faptul că orice formulă a Cp se poate reda *echivalent* printr-o formulă care conţine strict cei trei operatori logici (cf. §§1-3). Relevanţa logico-matematică a acestor construcţii rezidă în următoarele:

[7] Tot ”formule” sunt numite şi acele expresii care sunt *demonstrate* din axiome (cf. enumeraţia din Cap. 1, §11), nume înlocuit în traducere cu ”teoremă”.

[8] În terminologia din Hilbert-Bernays [1934], §3, 54-55, aceste concepte sunt redate prin ”identisch wahr” (identic adevărată), respectiv ”identisch falsch” (identic falsă).

[9] El este dezvoltat, cu anumite mutaţii conceptuale, în Hilbert-Bernays [1934], §3, dar şi în Hilbert-Ackermann [1972], *Grundzüge der theoretischen Logik*, Sechste Auflage, Springer-Verlag, Cap. 1.

(a) Reprezintă un elegant *procedeu de decizie*, în următorul sens: f.n.c. ne permit să stabilim dacă o formulă dată este sau nu logic adevărată, respectiv f.n.d. ne permit să decidem dacă formula este sau nu logic falsă.

Ele pot fi însă aplicate complementar, fie în stabilirea adevărului logic al unei formule $\mathfrak{A}$, fie în stabilirea falsităţii logice a formulei, fie, în fine, în stabilirea satisfiabilităţii formulei sau a negaţiei ei, fapt bazat pe următoarele echivalenţe:

(Eq1) $\mathfrak{A}$ este logic adevărată ddacă[10] $\overline{\mathfrak{A}}$ este logic falsă, respectiv

(Eq2) $\overline{\mathfrak{A}}$ este logic adevărată ddacă $\mathfrak{A}$ este logic falsă.

(Eq1*) $\mathfrak{A}$ nu este logic adevărată ddacă $\overline{\mathfrak{A}}$ nu este logic falsă; rezultă din (Eq1).

(Eq2*) $\overline{\mathfrak{A}}$ nu este logic adevărată, ddacă $\mathfrak{A}$ nu este logic falsă; rezultă din (Eq2).

Rezumativ, formele normale permit soluţionarea completă a problemei deciziei în Cp.[11]

(b) Într-o formă particulară a ei, forma normală conjunctivă *perfectă* (f.n.c.p.) (i.e., o formă normală conjunctivă în care fiecare conjunct conţine toate variabilele formulei), permite decuparea *varietăţii* formulelor care pot fi construite cu variabilele propoziţionale $X_1, \ldots, X_n$. Pur combinatoric, numărul total al funcţiilor de adevăr care pot fi construite cu cele n variabile este $2^{(2^n)}$. Iar acest număr coincide cu numărul total al conjuncţiilor parţiale ale formei normale conjunctive a expresiei

$$(X_1 \& \overline{X}_1) \vee \ldots \vee (X_n \& \overline{X}_n)$$

(dacă acest număr include şi conjuncţia vidă), număr care coincide cu numărul total al conjuncţiilor parţiale ale formei normale conjunctive perfecte a expresiei de mai sus.[12] (PLM, §7).

---

[10]"ddacă" este o abreviere pentru "dacă şi numai dacă".

[11]Prin *problema deciziei* (*Entscheidungsproblem*) în logică se înţelege problema stabilirii validităţii universale a formulelor sale, respectiv problema duală a stabilirii satisfiabilităţii formulelor.

[12]Pentru detalii, comp. şi H. Scholz – G. Hasenjaeger [1961], *Grundzüge der mathematischen Logik*, Springer-Verlag, Berlin, §§26, 27, D. Hilbert, W. Ackermann [1972], Cap. 1, §7.

(c) Forma normală conjunctivă perfectă permite derivarea tuturor consecinţelor din premise (axiome) date. Pentru aceasta se construieşte conjuncţia tuturor premiselor iar formula astfel obţinută este adusă în f.n.c.p. Aşa cum demonstraţia ne arată (cf. §9), constituie consecinţă a premiselor date orice conjuncţie de conjuncţi din f.n.c.p.

Să remarcăm totodată faptul că următoarea echivalenţă are loc: B este consecinţă logică a premiselor $A_1, \ldots, A_n$ ddacă formula $(A_1 \& \ldots \& A_n) \to B$ este una logic adevărată.[13]

2. Conceptul *dualităţii* reprezintă un instrument esenţial în mărirea stocului formulelor valide. Dacă $\mathfrak{A}$ este o formulă care conţine doar operatorii &, $\vee$ şi $^-$, atunci *duala* lui $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^\delta$, este formula care rezultă din $\mathfrak{A}$ prin înlocuirea reciprocă a operatorilor & şi $\vee$.[14]

Mai întâi, să remarcăm următorul lucru: *negaţia* unei formule $\mathfrak{A}$, care conţine strict operatorii &, $\vee$ şi $^-$, se poate obţine prin înlocuirea operatorilor binari cu dualii corespunzători şi a variabilelor propoziţionale cu negaţiile lor, fapt sugerat de altfel de formulele De Morgan: $\overline{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}$ eq $\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ şi $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$ eq $\overline{\mathfrak{A}} \& \overline{\mathfrak{B}}$, unde "eq" este echivalenţa *logică*.[15] Apoi, modul în care din formule logic adevărate derivăm alte formule logic adevărate *via dualizare* este redat prin următoarea *teoremă*: Dacă $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ sunt formule care nu conţin decât operatorii &, $\vee$ şi $^-$, atunci au loc:

(1) $\mathfrak{A}$ este logic adevărată ddacă $\overline{\mathfrak{A}^\delta}$ este logic adevărată.
(2) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ este logic adevărată ddacă $\mathfrak{B}^\delta \to \mathfrak{A}^\delta$ este logic adevărată.

[13] Acest rezultat este cunoscut sub numele de *Teorema normalităţii pentru Cp*. Pentru detalii şi demonstraţii, comp. V. Drăghici [2023], *Mathematical Logic*, Presa Universitară Clujeană, Ch. 1, Sect. 2.6.

[14] Cum uşor se poate vedea, ca funcţii de adevăr conjuncţia şi disjuncţia stau în următoarea relaţie (de dualitate): matricea uneia se obţine din matricea celeilalte înlocuind reciproc, *peste tot*, valorile de adevăr.

[15] Numită şi echivalenţă *tautologică*; i.e., A eq B ddacă formula $A \sim B$ este *logic* adevărată. În schimb, $A \sim B$ este echivalenţa *materială* şi care *nu* este o formulă *logic* adevărată.

(3) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ este logic adevărată ddacă $\mathfrak{A}^\delta \sim \mathfrak{B}^\delta$ este logic adevărată.[16]

Demonstraţia teoremei se poate face aplicând remarca de mai sus cu privire la construcţia negaţiei unei formule (cf. §5). Mai notăm faptul că această remarcă se poate aplica în construcţia formei normale *disjunctive* a unei formule $\mathfrak{A}$, în următorul mod: (1) se neagă $\mathfrak{A}$, (2) se construieşte forma normală *conjunctivă* a formulei $\overline{\mathfrak{A}}$, şi (3) se construieşte negaţia formulei obţinute prin (2), în acord cu remarca de mai sus (cf. §6).

3. *Axiomatica calculului propoziţional* (§§10-13) reprezintă un alt mod de organizare a Cp decât cel reprezentat prin teoria funcţiilor de adevăr. Însă aşa cum construcţia formelor normale în teoria funcţiilor de adevăr se baza, aşa cum am menţionat, pe completitudinea funcţională a mulţimii de operatori $\{\&, \vee, ^{-}\}$, tot astfel şi organizarea axiomatică se bazează pe acest fapt, într-un sens chiar mai restrâns, respectiv pe completitudinea funcţională a următoarelor mulţimi de operatori $\{\&, ^{-}\}$, $\{\vee, ^{-}\}$, $\{\rightarrow, ^{-}\}$, $\{/\}$, unde "/" este conectorul incompatibilitate ("bara" lui Sheffer). Fiecare dintre aceste mulţimi indică o posibilitate de elaborare a unui sistem axiomatic al Cp,[17] la care se adaugă şi alte posibilităţi de construcţie, respectiv introducerea de la bun început a mai multor operatori[18] sau construcţii în care locul axiomelor este preluat de "Schlußfiguren" (figuri de inferenţe).[19]

[16]Autorii PLM menţionează doar forma (3) (şi doar într-o formă *condiţională*) pe care o numesc *Principiul Dualităţii*. Pentru detalii şi demonstraţii pentru toate cele trei forme, comp. V. Drăghici [2023], Ch. 1, Sect. 2.5. Ideea de dualizare poate fi însă extinsă şi cu referire la ceilalţi operatori binari ai Cp; pentru detalii comp. A. Church [1956], *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Vol. I, §16.

[17]Pentru detalii, comp. e.g., Hilbert-Ackermann [PLM], §10; Hilbert-Ackermann [1972], Cap. 1, §9; Hilbert-Bernays [1934], §3, 64-65.

[18]Hilbert-Bernays [1934], §3, 66; S.C. Kleene [1964], §19.

[19]Cf. G. Gentzen [1934-5], "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, 177-210, 405-431.

Sistemul axiomatic din PLM (§10) este, în esenţă, sistemul din *Principia Mathematica*,[20] format din patru axiome sau *formule logice primitive* (*logische Grundformeln*) şi două *reguli primitive de deducţie a formulelor adevărate* (*Grundregeln zur Ableitung richtiger Formeln*). Chiar dacă în formularea axiomelor apare operatorul $\rightarrow$, el trebuie înţeles ca o abreviere, i.e., $X \rightarrow Y$ înseamnă $\overline{X} \vee Y$, aşa că operatorii logici primitivi ai axiomaticii Cp sunt strict $\vee$ şi $^{-}$. Regulile primitive de deducţie sunt Regula Substituţiei şi Regula Detaşării.[21] Cele două reguli ”constituie analogonul formal al celor mai simple inferenţe intuitive, cea a deducţiei de la general la particular (”dictum de omni”) şi cea a deducţiei de la temei la consecinţă (”modus ponens” al inferenţei ipotetice)”.[22]

Cu privire la termenul german *Ableitung*, acesta apare cu următoarele sensuri: (a) cu referire la cele două reguli de *deducţie*, α şi β, (b) deducţia sau derivarea din axiome de noi formule ale limbajului obiect al logicii, caz în care vorbim despre formule *demonstrate* sau *teoreme*, sensul său fiind identic cu cel al *demonstraţiei* (*Beweis*), şi (c) deducţia de *reguli derivate* (*abgeleitete Regeln*), altele decât α şi β. Acestea sunt reguli auxiliare, nenecesare construcţiei axiomatice ca atare, dar a căror utilizare simplifică demonstraţiile teoremelor.[23]

Acest aparat formal permite derivarea tuturor formulelor universal valide ale Cp.

---

[20]Comp. B. Russell şi A.N. Whitehead [1910], *Principia Mathematica*, Vol. I, Ed. I, Cambridge.

[21]Atât în PLM cât şi Hilbert-Bernays [1934], §3, această regulă este numită ”Schlußschema” (schema implicaţiei). În Hilbert-Ackermann [1972], 29, regula apare sub numele *Abtrennungsregel* (regula detaşării), nume pe care l-am preluat aici.

[22]Cf. HIlbert-Bernays [1934], §3, 63.

[23]În utilizarea lor curentă, cei doi termeni ”deducţie” şi ”demonstraţie” se corelează astfel: deducţia este o demonstraţie din n premise (altele decât axiomele sistemului) iar demonstraţia este o deducţie din zero astfel de premise (i.e., o deducţie doar din axiomele sistemului). Iar ”teoremă” înseamnă atât o formulă demonstrabilă a limbajului obiect, cât şi o ”reţetă” (regulă) prin care din formule demontrate de o anumită formă se conchide că alte formule sunt de asemenea demonstrabile (*stricto sensu*, acestea sunt *meta*teoreme).

Problemele care se ridică în legătură cu organizarea axiomatică a Cp sunt: consistenţa acestui calcul, independenţa axiomelor şi completitudinea Cp.

Demonstrarea *consistenţei* Cp autorii PLM o fac printr-o interpretare aritmetică, în următorul sens: $X, Y, Z, \ldots$ sunt variabile aritmetice (care iau valorile 1, 0), $X \vee Y$ este produsul aritmetic, iar $\overline{0} = 1$ şi $\overline{1} = 0$. În această interpretare, cum uşor se poate arăta, toate axiomele au proprietatea de a fi identic 0 iar regulile de deducţie conservă această proprietate. În acest fel, toate formulele derivate din axiome (i.e., teoremele) au proprietatea de a fi identic 0. Acum, fiindcă două formule contradictorii nu pot avea aceeaşi valoare aritmetică, rezultă că dacă una este teoremă (şi deci are proprietatea de a fi identic 0), atunci cealaltă nu are această proprietate şi este deci nedemonstrabilă. Ceea ce înseamnă că sistemul axiomatic este consistent.

Printr-o interpretare aritmetică similară este demonstrată şi *independenţa* axiomelor, i.e., niciuna din axiome nu este derivabilă din celelalte.

Completitudinea sistemului axiomatic din PLM se poate defini în două moduri: completitudinea *semantică*, potrivit căreia orice formulă universal validă este demonstrabilă, şi cea *sintactică*, i.e., adăugarea unei formule nedemonstrabile în sistem ca o nouă axiomă generează o inconsistenţă. Sistemul axiomatic al Cp din PLM este complet în ambele sensuri.

În primul caz, dat fiind faptul că atât regulile de construcţie a formei normale conjunctive a unei formule, cât şi regulile pe baza cărora decidem asupra validităţii formulei aplicând formele normale conjunctive *sunt reguli derivabile în sistemul axiomatic*, demonstrabilitatea unei formule $\mathfrak{A}$ în sistemul axiomatic se reduce la a arăta că fiecare conjunct al formei ei normale conjunctive conţine o variabilă împreună cu negaţia ei.

În al doilea caz, argumentul completitudinii este următorul (cf. §13). Dacă $\mathfrak{A}$ este o formulă nedemonstrabilă, atunci nici forma ei normală conjunctivă $\mathfrak{B}$ nu este demonstrabilă. Şi deci $\mathfrak{B}$ are un conjunct $\mathfrak{C}$ în

care nicio variabilă nu apare împreună cu negaţia ei. Acum, dacă în $\mathfrak{C}$ în locul fiecărei variabile nenegate vom pune X iar în locul fiecărei variabile negate vom pune $\overline{X}$, ceea ce vom obţine este o disjuncţie de forma $X \vee X \vee \ldots \vee X$, echivalent X. Acum, dacă formula nedemonstrabilă $\mathfrak{A}$ ar fi adevărată, atunci şi $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ şi astfel şi X ar fi adevărate. De unde, prin substituţia lui $\overline{X}$ pentru X ar rezulta că şi $\overline{X}$ ar fi adevărată. Imposibil.

Capitolul 2. Calculul clasial

În construcţia PLM calculul clasial este un *calcul combinat* "în care simbolurile logice &, $\vee$, $^{-}$ sunt utilizate în parte pentru conectarea propoziţiilor, în parte pentru conectarea predicatelor" (Cap. 2, §2). Pe scurt, lucrurile stau astfel: $\overline{X}$ reprezintă clasa complementară clasei X, $X\&Y$ reprezintă intersecţia celor două clase X şi Y, iar $X \vee Y$ reprezintă reuniunea celor două clase. Aceşti conectori clasiali pot fi desigur combinaţi în varii feluri, însă utilizând doar &, $\vee$ şi $^{-}$ nu avem posibilitatea construirii unor propoziţii despre clase. Pentru aceasta sunt introduse două relaţii: $X \to Y$ (o abreviere pentru $\overline{X} \vee Y$), cu semnificaţia "X este o subclasă a clasei Y", şi $X \sim Y$ (o abreviere pentru $\overline{X} \vee Y \& \overline{Y} \vee X$) cu semnificaţia "$X$ este identică cu Y". Prin introducerea unui simbolism adecvat pentru redarea cuantificatorilor, cele patru tipuri de propoziţii categorice din silogistica aristotelică sunt redate astfel: $A : |\overline{X} \vee Y|$, $I : |\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}|$, $E : |\overline{X} \vee \overline{Y}|$ şi $O : |\overline{\overline{X} \vee Y}|$, unde barele verticale sunt introduse pentru eliminarea ambiguităţilor cu privire la interpretarea construcţiilor simbolice. Cu cele două relaţii clasiale ($\to$ şi $\sim$), la care se adaugă interpretarea celor cinci simboluri (&, $\vee$, $^{-}$, $\to$, $\sim$) în sensul calculului propoziţional, posibilităţile construcţiei de propoziţii în calculul clasial se amplifică considerabil. Utilizând acest aparat formal din cele 19 moduri valide ale logicii aristotelice,[24] calculul clasial validează doar 15. Nu sunt validate: darapti, bamalip, felapton, fesapo.

[24]Din cele 24 moduri valide ale silogisticii moderne, din listă nu fac parte cele 5 moduri subalterne (barbari, celaront, cesaro, camestrop şi camenop).

Sursa acestei discrepanţe şi posibilitatea recuperării modurilor nevalidate sunt uşor sesizabile dacă apelăm la ediţia a VI-a a lucrării celor doi autori germani.[25] Aici modul elaborării calculului clasial este unul modern. Locul conectorilor clasiali (&, $\vee$, $^{-}$) din ediţia a II-a este preluat de operaţiile intersecţie ($\cap$), reuniune ($\cup$) şi complementară ($^{-}$), iar locul relaţiilor "subclasă" ($X \to Y$) şi "identitate" ($\sim$) este preluat de simbolismul uzual $\alpha \subset \beta$ (relaţia de incluziune) şi $\alpha = \beta$ (relaţia de identitate). Sunt introduse *variabile* pentru clase, sunt apoi definite conceptele "termen clasial" şi "expresie a calculului clasial". Respectiv, un termen clasial este orice construcţie simbolică generată strict prin următoarele reguli: 1. Orice variabilă clasială este un termen clasial, 2. Dacă $\mathfrak{a}$ este un termen clasial, atunci $\overline{\mathfrak{a}}$ este un termen clasial, şi 3. Dacă $\mathfrak{a}$ şi $\mathfrak{b}$ sunt termeni clasiali, atunci $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ şi $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ sunt termeni clasiali. Iar o expresie a calculului clasial este definită strict prin următoarele reguli: 4. Dacă $\mathfrak{a}$ şi $\mathfrak{b}$ sunt termeni clasiali, atunci $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ şi $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ sunt expresii, 5. Dacă $\mathfrak{A}$ este o expresie, atunci $\neg\mathfrak{A}$ este o expresie (unde "$\neg$" este simbolul negaţiei logice), şi 6. Dacă $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ sunt expresii, atunci $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ şi $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ sunt expresii (unde "$\wedge$" este simbolul conjuncţiei iar "$\leftrightarrow$" este simbolul echivalenţei[26]). Cu acest simbolism cele 4 tipuri de propoziţii categorice sunt redate astfel: $A : \sigma \subset \pi$, $I : \neg(\sigma \subset \overline{\pi})$, $E : \sigma \subset \overline{\pi}$ şi $O : \neg(\sigma \subset \pi)$, unde σ şi π sunt clasele care corespund termenilor logici "subiect", respectiv "predicat". La acest aparat sintactic minimal se adaugă definiţia conceptului semantic "expresie universal validă": "O expresie se numeşte universal validă dacă ea este validă în orice domeniu nevid de indivizi, i.e., în orice domeniu de indivizi care conţine cel puţin un element. Iar aceasta înseamnă că pentru orice domeniu de acest fel, prin înlocuirea variabilelor clasiale cu clase arbitrare, construite

[25] D. Hilbert, W. Ackermann [1972], Cap. 2, §3. Spre deosebire de ediţia a II-a, această ediţie excelează prin eleganţă în tratarea acestui subiect.

[26] $\neg$, $\wedge$ şi $\leftrightarrow$ corespund simbolurilor $^{-}$, & şi $\sim$ din PLM.

cu elemente din acest domeniu, expresia trebuie să se transforme într-o propoziţie adevărată."[27]

Acum, decuparea modurilor valide ale silogisticii tradiţionale este mult mai elegantă. Testarea tuturor combinaţiilor posibile de trei propoziţii (două premise şi o concluzie) care formează un mod silogistic se face printr-o "translaţie" a modului respectiv într-o expresie a calculului clasial. Modul considerat este unul valid dacă şi numai dacă expresia care-i corespunde este una universal validă. De exemplu, dacă σ, π şi μ sunt clasele care corespund termenilor logici "subiect", "predicat" şi "termen mediu", atunci modului cu premisele $\mu \subset \pi$, $\sigma \subset \mu$ şi concluzia $\sigma \subset \pi$ îi corespunde expresia (formula) universal validă a calculului clasial $(a \subset b) \wedge (c \subset a) \rightarrow (c \subset b)$. Acest mod este deci unul valid, el este tocmai modul "barbara". Un asemenea formalism, similar celui adoptat în ediţia a II-a, validează doar 15 din cele 19 moduri ale logicii aristotelice. Din nou, modurile aristotelice "darapti", "felapton", "bamalip" şi "fesapo" nu sunt validate, deoarece niciuna din expresiile clasiale care corespunde acestor moduri nu este universal validă. De exemplu, modului "darapti", cu premisele $\mu \subset \pi$, $\mu \subset \sigma$ şi concluzia $\neg(\sigma \subset \overline{\pi})$ îi corespunde expresia $(a \subset b) \wedge (a \subset c) \rightarrow \neg(c \subset \overline{b})$, care nu este universal validă. La fel şi pentru celelalte trei moduri. Discrepanţa faţă de silogistica aristotelică rezidă în faptul că interpretarea aristotelică a propoziţiilor universal afirmative nu coincide cu interpretarea clasială de mai sus $\sigma \subset \pi$, deoarece la Aristotel o propoziţie de forma "Toţi S sunt P" este adevărată doar dacă *există* obiecte care sunt S, pe când $\sigma \subset \pi$ are loc şi dacă σ este clasă vidă.

Însă cele 4 moduri "redevin" valide dacă premiselor lor li se adaugă o expresie care redă ideea *neviditäţii* unui termen logic. În cazul modului "darapti" e vorba despre neviditatea termenul mediu. Şi deci dacă celor două premise ale lui "darapti" li se adaugă încă o premisă, redată prin $\neg(\mu \subset \overline{\mu})$, atunci modul este validat de calculul clasial.

[27]D. Hilbert, W. Ackermann [1972], 49. Şapte teoreme fundamentale redau o excelentă analiză făcută conceptului validităţii în calculul clasial.

Capitolul 3. Calculul restrâns al predicatelor (CP)

Ceea ce numim "calculul restrâns al predicatelor" reprezintă o varietate de construcţii logico-matematice. Cea uzuală astăzi, cunoscută şi sub numele de logică de ordinul întâi, este o extensie a Calcului propoziţional. *Sintactic*, calculul restrâns al predicatelor conţine următoarele clase de simboluri: (1) simboluri pentru operatorii Cp (negaţie, conjuncţie, disjuncţie,...), (2) simboluri pentru cuantificatori ($\forall$ – cuantificatorul universal, $\exists$ – cuantificatorul existenţial), (3) simboluri pentru variabile individuale: $(x, y, z, \ldots)$, (4) simboluri auxiliare (parantezele), (5) simboluri pentru predicate $(P, Q, R, \ldots)$, (6) simboluri pentru funcţii $(f, g, h, \ldots)$ şi (7) simboluri pentru constante $(a, b, c, \ldots, c_1, c_2, \ldots)$. Ultimele trei clase de simboluri ((5), (6) şi (7)), laolaltă, constituie *limbajul logicii* de ordinul întâi (L). Cu ajutorul simbolurilor de mai sus sunt definite două clase de entităţi sintactice: *termeni* şi *formule*. Prin "termen" înţelegem clasele (3) şi (7) de mai sus la care se adaugă construcţiile sintactice de forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, unde f este un simbol funcţional (i.e., aparţine clasei (6)), iar $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni arbitrari. Prin "formulă" înţelegem construcţii sintactice de forma $P^n(t_1, \ldots, t_n)$, unde P^n este un simbol predicativ n-adic (i.e., cu n locuri pentru argumente), $\overline{\mathfrak{A}}$, unde $\mathfrak{A}$ este o formulă, $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, etc., unde $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ sunt formule şi, în fine, $\forall x \mathfrak{A}$ şi $\exists x \mathfrak{A}$, unde $\mathfrak{A}$ este o formulă.

Semantic, calculul restrâns al predicatelor conţine, înainte de toate, definiţiile principalelor concepte semantice: model al limbajului L, i.e., $M = \langle D, i \rangle$, unde D este un *domeniu* nevid de elemente iar i este funcţia *interpretare* care (a) asignează fiecărui simbol predicativ n-adic P^n o *relaţie*[28] $(P^n)^i$ (simbolul predicativ P^2, de exemplu, prin interpretare poate fi relaţia $(P^2)^i$: "mai mic decât" etc.), (b) asignează fiecărui simbol funcţional n-ar f^n o *funcţie* $(f^n)^i$ (de exemplu, $(f^2)^i$ poate fi "+" (i.e., adiţia), şi (c) asignează fiecărui simbol constantă c un element $c^i \in D$.

[28]Numită şi *predicat*; şi astfel un simbol predicativ (neinterpretat), prin funcţia i capătă semnificaţie.

Variabilele individuale sunt interpretate printr-o funcţie distinctă: *asignarea* μ (ca funcţie de la mulţimea variabilelor individuale la domeniul D al modelului). Evident, dacă funcţiile i şi μ sunt date, atunci valoarea oricărui termen poate fi calculată. Apoi, pe baza conceptului de model sunt definite alte trei concepte fundamentale ale semanticii calculului restrâns al predicatelor: *satisfiabilitatea* unei formule A într-o asignare μ în M, *adevărul* formulei A în M (i.e., A este adevărată în M ddacă A este adevărată în *orice* asignare în M) şi *validitatea* formulei A (i.e., A este validă dacă şi numai dacă A este adevărată în orice model).[29]

În raport cu prezentarea mai sus făcută calculului restrâns al predicatelor, facem următoarele menţiuni. Mulţimile (5)-(7) pot fi finite sau infinit numărabile. Însă (6) şi (7) pot fi chiar mulţimi vide, caz în care putem vorbi tot despre un calcul restrâns al predicatelor. Mulţimea (5), în schimb, trebuie să conţină cel puţin un element. Dacă (6) şi (7) sunt vide, atunci mulţimea termenilor nu conţine simboluri pentru funcţii şi nici simboluri pentru constante, şi deci prin "termen" înţelegem strict mulţimea (3) (simboluri pentru variabile individuale). În acest caz vorbim despre calculul *pur* al predicatelor de ordinul întâi, aşa cum este cazul construcţiei din PLM (Cap. 3).

În fine, distincţia "restrâns"–"extins" cu referire la calculul predicatelor înseamnă următoarele. Un exemplu de calcul restrâns al predicatelor este cel mai sus prezentat (şi eventualele lui variante). Într-un calcul *extins*, numit şi logică de ordinul doi (mai general, de ordinul n), întâlnim şi următoarele cazuri: simbolurile predicative au alte simboluri predicative drept argumente sau sunt construcţii simbolice în care sunt admise cuantificări peste predicate sau funcţii. Un exemplu de astfel de construcţii este cel care face obiectul analizei din Capitolul 4.

Expunerea autorilor PLM n-are gradul de precizie al conceptualizărilor recente, însă toate conceptele fundamentale ale calculului restrâns al predicatelor îşi găsesc corespondentul lor în PLM. Mai întâi, distincţia simboluri predicative – predicate (relaţii), mai sus menţionată,

[29]Pentru detalii, comp. V. Drăghici, [2023], Ch. 2, Sect. 2.1.

în PLM apare formulată în termenii următori: variabile predicative (sau simboluri funcţionale cu locuri pentru argumente) – predicate individuale (sau predicate speciale sau predicate definite).[30] Modul în care cele două niveluri ale construcţiei CP (sintactic şi semantic) se conectează este următorul. Fie P^2 un simbol predicativ diadic, fie x, y două variabile individuale. Atunci $P(x, y)$ este o formulă (elementară), şi care devine o propoziţie prin interpretare. I.e., dacă prin P^2 înţelegem relaţia "mai mic decât" (simbolic: $<$), atunci formula devine expresia $x < y$ şi care, desigur nu este o propoziţie. Însă dacă în locul lui x şi y vom pune (nume de) obiecte, 2 şi 3, să zicem, atunci expresia $2 < 3$ devine o propoziţie adevărată, iar pentru 7 şi 4 obţinem o propoziţie falsă. Aşadar, valoarea de adevăr a propoziţiei derivate din $x < y$ *depinde* de asignările făcute variabilelor x şi y.

Într-o formulă, de exemplu $\forall x P(x, y)$, subformula $P(x, y)$ se numeşte *domeniul de acţiune* al cuantificatorului universal "$\forall x$", variabila x (în cele două ocurenţe ale sale) se numeşte variabilă *legată* (prin cuantificatorul universal), iar variabila y se numeşte *liberă*. Iar dacă toate variabilele individuale ale unei formule sunt legate, atunci formula se numeşte *închisă* sau *propoziţie*. E.g., formula $\forall x \exists y\; x < y$ (unde x şi y sunt numere reale) reprezintă, simplu, propoziţia: "pentru orice număr real x există un număr y astfel încât $x < y$".

Modul în care sintaxa şi semantica se conectează poate fi ilustrat prin definiţia conceptului *validităţii universale* (*Allgemeingültigkeit*). O formulă a CP se numeşte universal validă dacă pentru orice domeniu de indivizi are loc: dacă pentru variabilele propoziţionale se substituie propoziţii definite, pentru variabilele individuale libere se substituie (nume de)

[30]Distincţie uzuală în unele construcţii logice şi în forma *variabile predicative – constante predicative*; aşa cum distincţia variabile individuale – obiecte individuale (nume proprii) este redată în termenii *variabile individuale – constante individuale.*

obiecte din domeniul de indivizi iar pentru variabilele predicative se substituie predicate definite în domeniul de indivizi, atunci formula devine întotdeauna o propoziţie adevărată.[31]

Similar construcţiei calculului propoziţional, şi aici avem un sistem axiomatic (cf. Cap. 3, §5) şi care este o extensie a sistemului corespunzător din Cp (cf. Cap. 1, §10). Una din regulile sistemului axiomatic al CP este însă formulată incomplet, neconţinând o clauză esenţială cu privire la variabilele legate.[32] Această clauză este însă conţinută în ediţia a VI-a a lucrării ca parte a Teoremei XIII şi este următoarea: "Apoi, locurile pentru argumente ale lui F în formula $\mathfrak{A}$ nu pot fi ocupate în nicio ocurenţă de variabile care în $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ apar în formă legată".[33] Acest text a fost introdus în formularea Regulii $\alpha 3$) şi este marcat prin punerea lui în paranteze pătrate.

Acest aparat formal permite derivarea (deducţia) din axiome a tuturor formulelor valide.[34] Aidoma sistemului axiomatic al Cp, formulele astfel derivate se numesc *teoreme*, derivarea fiind propriu-zis *demonstraţia* teoremei respective. Din nou, similar sistemului din Cp, o serie de reguli *derivate* de deducţie facilitează demonstraţia de noi teoreme (§6).

Dualitatea în CP. Având în vedere faptul că & şi $\vee$ sunt operatori duali şi relaţia dintre cuantificatorii $\forall$ şi $\exists$ cu, respectiv, & şi $\vee$, era de

[31]În ediţia a VI-a autorii definesc mai întâi *validitatea* formulei într-un domeniu de indivizi (*Gültigkeit in einem Individuenbereich*), în modul mai sus definit, iar apoi *validitatea universală* a formulei ca validitate în *orice* domeniu nevid de indivizi; cf. Hilbert-Ackermann [1972], 75-76. Conceptul validităţii, respectiv conceptul satisfiabilităţii, *cu referire la un domeniu de indivizi* sunt analizabile în termenii "k-validitate" (*k-zahlig identisch*), respectiv "k-satisfiabilitate" (*k-zahlig erfüllbar*), unde k reprezintă numărul cardinal (finit sau transfinit > 0) al domeniului considerat; comp. D. Hilbert şi P. Bernays [1934], §4, 119-121; H. Scholz şi G. Hasenjaeger [1961], §77; S.C. Kleene [1964], §36, 171-172.

[32]Remarcă făcută de A. Church [1944], *Introduction to Mathematical Logic*, Part I, Princeton, 63. Este vorba despre regula substituţiei variabilelor predicative cu formule ale CP (Regula $\alpha 3$)).

[33]Cf. D. Hilbert, W. Ackermann [1972], 90.

[34]Obiect al *Teoremei completitudinii* sistemului axiomatic (cf. Cap. 3, §10).

aşteptat ca perechii de operatori duali din Cp $(\&, \vee)$, să-i adăugăm în CP perechea $(\forall, \exists)$. Acum, corespunzător Cp, construcţia contradictoriei unei formule care nu conţine decât operatori booleni şi cuantificatori se face prin înlocuirea operatorilor $\forall$, $\exists$, & şi $\vee$ cu, respectiv, $\exists$, $\forall$, $\vee$ şi & (i.e., prin construcţia dualei) şi a formulelor elementare[35] cu negaţiile lor. Aplicând acest rezultat, toate cele trei echivalenţe privitoare la dualizare, menţionate mai sus cu privire la Cp, sunt demonstrabile şi aici.

Formele normale în CP, similar celor din Cp, sunt construcţii sintactice de un tip special. Două astfel de forme fac obiectul analizei: *forma normală prenexă* şi *forma normală Skolem*. O formulă $\mathfrak{A}$ a CP se află în forma normală prenexă dacă $\mathfrak{A}$ are forma $\Pi\mathfrak{B}$ unde Π conţine toţi cuantificatorii formulei, nenegaţi, iar $\mathfrak{B}$ este o formulă care nu conţine cuantificatori; mai mult, domeniile de acţiune ale cuantificatorilor din Π se extind până la capătul formulei. Π se numeşte *prefixul* formulei $\mathfrak{A}$ iar $\mathfrak{B}$ *matricea* ei. Formula $\mathfrak{A}$ se află în forma normală Skolem dacă $\mathfrak{A}$ este în forma normală prenexă şi toţi cuantificatorii existenţiali preced cuantificatorii universali.

În legătură cu aceste forme normale următoarele rezultate au loc:

(1) Pentru orice formulă $\mathfrak{A}$ a CP se poate găsi o formulă $\mathfrak{A}^*$ în forma normală prenexă, astfel încât în sistemul formal considerat următoarea echivalenţă este demonstrabilă: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^*$.

(2) Pentru orice formulă $\mathfrak{A}$ a CP se poate găsi o formulă $\mathfrak{A}^{**}$ în forma normală Skolem, astfel încât următoarea echivalenţă are loc:

$\mathfrak{A}$ este demonstrabilă ddacă $\mathfrak{A}^{**}$ este demonstrabilă.[36]

Remarcăm mai întâi deosebirea dintre cele două relaţii, conţinute în (1), respectiv (2). În primul caz cele două formule, $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{A}^*$, sunt *demonstrabil echivalente*, în cel de-al doilea, în schimb, $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{A}^{**}$ sunt *codeductive*, în sensul că "din $\mathfrak{A}$, în acord cu regulile calculului predicatelor

[35]Formulele *elementare* în PLM sunt aşadar variabilele propoziţionale şi construcţiile de forma $P(x_1, \ldots, x_n)$, unde P este o variabilă predicativă n-adică iar $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile individuale.

[36]Acesta este şi conţinutul Teoremei XXII din D. Hilbert, W. Ackermann [1972], 96.

este deductibilă formula [$\mathfrak{A}^{**}$] iar din [$\mathfrak{A}^{**}$] este deductibilă $\mathfrak{A}$”.[37] Cum uşor se poate vedea, cele două relaţii sunt distincte, prima fiind mai tare decât a doua. De exemplu, formulele $\mathfrak{A}(x)$ şi $\forall x\mathfrak{A}(x)$ sunt co-deductive, fără ca $\mathfrak{A}(x) \equiv \forall x\mathfrak{A}(x)$ să fie demonstrabilă.

Rezultatul din (2), privitor la Teorema lui Skolem, este valabil nu numai în formularea deja dată, i.e., ca rezultat *sintactic*, ci şi ca rezultat *semantic* (2*) lucru care nu figurează în ediţia a II-a (care face obiectul traducerii de faţă), dar care figurează explicit ca Teorema XXIII din ediţia a VI-a.[38]

Demonstrarea echivalenţei (2*) (i.e., Teorema XXIII: $\mathfrak{A}$ este universal validă ddacă $\mathfrak{A}^{**}$ este universal validă) presupune demonstraţia *corectitudinii* sistemului formal, demonstraţie care se rezumă la a arăta că toate axiomele sistemului sunt formule valide iar regulile de deducţie conservă (în concluzie) validitatea premisei (premiselor).[39] Această demonstraţie, *via* demonstraţia Teoremei lui Skolem (forma (2)), permite ca în demonstraţia pentru (2) să înlocuim peste tot ”. . . este demonstrabilă” cu ”. . . este validă”,[40] obţinând astfel co-extensivitatea (2*): $\mathfrak{A}$ este universal validă dacă şi numai dacă forma ei Skolem $\mathfrak{A}^{**}$ este universal validă.

Menţiunea făcută cu privire la forma (2*) a Teoremei lui Skolem este esenţială unei demonstraţii corecte a teoremei completitudinii CP. Potrivit autorilor PLM, ”În acord cu cele expuse la finele §8, pentru orice formulă a calculului predicatelor se poate găsi o formulă în forma normală Skolem, astfel încât ambele formule sunt demonstrabile sau niciuna nu este demonstrabilă. Şi deci [în demonstraţia completitudinii] ne putem limita la a arăta că toate formulele identice [universal valide] în forma normală Skolem sunt şi demonstrabile.”[41] Cum a remarcat însă Quine,

[37]Cf. D. Hilbert, P. Bernays [1934], 149. Pentru detalii cu privire la cele două concepte metalogice ”echivalenţă demonstrabilă” (*Überprüfbarkeit*) şi ”co-deductibilitate” (*Deduktionsgleichheit*), comp. [1934], 132-133, 149.

[38]Cf. D. Hilbert, W. Ackermann [1972], 103-104.

[39]Demonstraţie dată în paginile anterioare ale ediţiei a VI-a (cf. §4, 78-79, 100).

[40]În acord cu indicaţiile demonstraţiei Teoremei XXIII din ed. a VI-a, 104.

[41]Ed. germ. [1946], 76-77.

această "limitare" nu este suficientă, deoarece "Dacă $\mathfrak{A}$ este *identică* iar $\mathfrak{A}^{**}$ nu este identică, atunci derivabilitatea tuturor *formulelor identice în forma normală Skolem* n-ar implica derivabilitatea formulei $\mathfrak{A}$. Formularea de mai sus a teoremei de reducţie a lui Skolem trebuie redată într-o formă mai tare, în următorul sens: "Pentru orice formulă *identică*. . . se poate găsi o formulă identică. . . "."[42]

Întrucât echivalenţa Teoremei XXIII este esenţială formei în care teorema completitudinii a fost demonstrată, am recurs la următoarele intervenţii în textul original. La finele §8 am introdus echivalenţa semantică a Teoremei XXIII, laolaltă cu indicaţia privitoare la demonstrarea ei. Iar în §10 (*Completitudinea sistemului axiomatic*), textul "În acord cu cele expuse la finele §8, pentru orice formulă a calculului predicatelor se poate găsi o formulă în forma normală Skolem astfel încât ambele formule sunt demonstrabile sau niciuna nu este demonstrabilă" a fost înlocuit, corespunzător, în acord cu observaţia lui Quine, cu următorul text, care redă conţinutul echivalenţei semantice a Teoremei XXIII, respectiv: "În acord cu cele expuse la finele §8, pentru orice formulă a calculului predicatelor se poate găsi o formulă în forma normală Skolem, astfel încât ambele formule sunt universal valide sau niciuna nu este universal validă".

Ambele intervenţii în textul original sunt marcate prin punerea textelor nou introduse în paranteze pătrate.

Completitudinea CP

Aşa cum am văzut în consideraţiile asupra axiomaticii calculului propoziţional, completitudinea se poate defini în două feluri: completitudinea *sintactică* şi cea *semantică*. Un sistem axiomatic este sintactic

[42]W.V.O. Quine [1938], "D. Hilbert and W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik (Review)", *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 3, No. 2, 83-84. Strict în sensul lui Quine, formularea ar fi următoarea: Pentru orice formulă identică se poate găsi o formulă identică în forma normală Skolem, astfel încât ambele formule sunt demonstrabile sau niciuna nu-i demonstrabilă. Aici am introdus, simplu, versiunea *semantică* a Th. Skolem, redată prin Th. XXIII a celei de-a şasea ediţii.

complet dacă adăugarea la axiomele sistemului a unei formule nedemonstrabile în sistem generează o contradicţie. În acest sens sistemul axiomatic de calcul al predicatelor nu este unul complet, deoarece adăugarea unei formule nedemonstrabile ca o nouă axiomă, e.g., $(Ex)F(x) \to \forall x F(x)$, $F(y) \to \forall x F(x)$, $\overline{F(x)} \vee F(y)$, nu generează o inconsistenţă. Evident, aceste formule sunt nevalide şi deci, prin *corectitudinea* sistemului considerat, ele nu sunt demonstrabile. Într-un sens mai tare, cel semantic, un sistem formal este complet dacă orice formulă validă este demonstrabilă în sistem. În acest sens, sistemul axiomatic de logică a predicatelor este unul complet.[43] Prezentăm mai jos, schematic, versiunea Hilbert-Ackermann a teoremei gödeliene a completitudinii.

Pentru motivele specificate cu privire la forma semantică (2^*) a Teoremei lui Skolem, în demonstraţia completitudinii este suficient să considerăm formule în forma normală Skolem, i.e., formule de forma

$$(Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k;y_1,\ldots,y_l).$$

Fie $x_0, x_1, x_2, \ldots$ şirul infinit numărabil al variabilelor individuale. Fie En o enumeraţie a tuturor k-tuplilor care pot fi construiţi cu aceste variabile. Fie $\mathfrak{B}_n$ formula $\mathfrak{A}(x_{n_1},\ldots,x_{n_k};x_{(n-1)l},\ldots,x_{nl})$, unde $x_{n_1},\ldots,x_{n_k}$ este cel de-al n-lea k-tuplu în En. Pentru orice n, fie $\mathfrak{C}_n$ disjuncţia $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_n$. Evident, $\mathfrak{C}_n$ este o formulă care nu conţine cuantificatori, componentele sale fiind formule elementare (i.e., variabile propoziţionale şi variabile predicative însoţite de argumente). Acum, dacă în $\mathfrak{C}_n$ înlocuim toate formulele elementare, altele decât variabilele propoziţionale, cu variabile propoziţionale distincte de cele care apar deja în $\mathfrak{C}_n$ şi distincte între ele (dacă formulele elementare pe care le înlocuim sunt distincte), atunci din formula logicii predicatelor $\mathfrak{C}_n$ vom obţine formula propoziţională $\mathfrak{E}_n$. Şi deci şirul de formule $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots$ devine $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \ldots$.

[43] Prima demonstraţie de completitudine a fost dată de K. Gödel [1930], "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, 349-360.

Vom avea strict următoarele două cazuri:

1. Există un n astfel încât $\mathfrak{E}_n$ este o formulă logic adevărată a calculului propoziţional.

2. Pentru niciun n $\mathfrak{E}_n$ nu este o formulă logic adevărată a calculului propoziţional.

Corespunzător, vom avea următoarele alternative: (A) formula dată (în forma normală Skolem) este derivabilă în sistemul axiomatic considerat (i.e., demonstrabilă), şi (B) *negaţia* formulei date este satisfiabilă într-un domeniu de indivizi format din numerele naturale. Demonstraţiile pentru (A) şi (B) conduc la două teoreme fundamentale:

Teorema de completitudine (*Gödel*). Orice formulă universal validă a CP este demonstrabilă în sistemul axiomatic specificat.

Teorema lui Löwenheim. Dacă o formulă a CP este universal validă într-un domeniu infinit numărabil de indivizi, atunci ea este universal validă în orice domeniu de indivizi.

În acord cu criticismul lui Church,[44] demonstraţia din textul original al PLM conţine erori, motiv pentru care această demonstraţie a fost parţial modificată. Textul nou introdus este o versiune a demonstraţiei date în traducerea engleză.[45]

Problema deciziei în CP. Calculul elaborat de autorii PLM este calculul pur al predicatelor, i.e., un calcul în care formulele nu conţin simboluri individuale. În acord cu §4 (Cap. 3), o formulă este o expresie construită strict din variabile propoziţionale, variabile individuale, variabile predicative şi conectorii &, $\vee$, $^{-}$, $\rightarrow$, $\sim$, plus cuantificatorii $(\forall, \exists)$. Într-o construcţie axiomatică a CP, strict derivarea din axiome a noi formule prin aplicarea regulilor *formale* de deducţie, este ceea ce se are în vedere, fără să conteze în vreun fel *semnificaţia* acestor construcţii. Trecerea de

[44]Cf. A. Church [1944], 75 şi urm., revizuită în recenzia din *Journal of Symbolic Logic*, vol. 10, 1945, 20.

[45]Comp. D. Hilbert, W. Ackermann [1999], *Principles of Mathematical Logic*, AMS Chelsea Publishing, 97-99.

la derivările pur sintactice la constructe cu semnificaţii (planul semantic) are loc prin interpretarea intuitivă (*inhaltliche Deutung*). O astfel de interpretare presupune următoarele: o mulţime nevidă de obiecte D (numită domeniu de indivizi), substituţia variabilelor propoziţionale cu propoziţii definite, substituţia variabilelor individuale libere cu nume de obiecte din D, şi a variabilelor predicative cu predicate individuale definite pe D. Procedând astfel, ceea ce se obţine este o propoziţie, care poate fi adevărată sau falsă. Dacă pentru *orice* domeniu de indivizi D şi pentru orice substituţii propoziţia astfel obţinută este adevărată, atunci formula dată este *universal validă*. O formulă se numeşte *satisfiabilă* dacă există un domeniu D de indivizi, astfel încât prin substituţiile mai sus menţionate formula devine o propoziţie adevărată. Modul în care cele două concepte, validitatea universală şi satisfiabilitatea, se corelează este redat de următoarele echivalenţe:

(Eq) $\mathfrak{A}$ este universal validă dacă şi numai dacă $\overline{\mathfrak{A}}$ nu este satisfiabilă, respectiv, echivalent, prin

(Eq*) $\mathfrak{A}$ nu este universal validă dacă şi numai dacă $\overline{\mathfrak{A}}$ este satisfiabilă (din (Eq)).

Prin *problema deciziei* se înţelege problema stabilirii validităţii universale a formulelor, respectiv, problema duală a stabilirii satisfiabilităţii formulelor. Această problemă este considerată problema centrală a logicii matematice.

Chiar dacă pentru anumite cazuri speciale ale CP (cf. §12) această problemă a fost soluţionată (e.g., pentru domenii *finite* de indivizi, pentru calculul predicatelor *monadice*, pentru formule cu anumite tipuri de prefixe), ca problemă generală a calculului predicatelor ea rămâne una *insolvabilă*.

Desigur, dacă avem în vedere atât corectitudinea cât şi completitudinea sistemului axiomatic al calculului predicatelor, vom deriva următoarea echivalenţă

(EQ) O formulă $\mathfrak{A}$ a CP este universal validă dacă şi numai dacă $\mathfrak{A}$ este demonstrabilă în sistemul axiomatic considerat.

Cu alte cuvinte, mulţimea formulelor universal valide şi mulţimea teoremelor sistemului axiomatic coincid. Această echivalenţă nu ajută însă în niciun fel la soluţionarea problemei deciziei pentru calculul restrâns al predicatelor, deoarece nu avem o procedură generală de decizie cu privire la derivabilitatea unei formule în sistemul axiomatic.[46]

Nedecidabilitatea CP este subiectul unui rezultat fundamental al logicii matematice, cunoscut sub numele de *Teorema lui Church*. Lucrarea autorilor germani, PLM, nu detaliază acest subiect. Dată fiind însă relevanţa lui logico-matematică, în directă legătură cu conţinutul PLM, l-am introdus într-o expunere concisă,[47] în această prezentare a PLM.

Nedecidabilitatea CP

Mai întâi, este convenabilă o uşoară schimbare de notaţie. În locul simbolului " $^{-}$ " din PLM vom introduce simbolul "$\neg$" (cu exact aceeaşi semnificaţie: *negaţia logică*). Bara " $^{-}$ ", în schimb, pusă deasupra unui simbol, e.g., $\overline{n}$ sau $\overline{g}$, va denota *numeralul* (sau numele formal al) numărului respectiv, n sau g. Notaţii precum $\mathcal{T} \vdash A$ sau $\mathcal{T} \nvdash A$ înseamnă că formula A este, respectiv nu este demonstrabilă (deductibilă) în $\mathcal{T}$. Simbolul "$\equiv$" are exact sensul operatorului "$\sim$" din PLM.

Fie $\mathcal{T}$ o teorie de ordinul întâi, i.e., o teorie în care predicatele nu conţin ca argumente ale lor alte predicate şi în care nu se cuantifică pe predicate şi funcţii. Singurele entităţi pe care se cuantifică sunt deci variabilele individuale. Teorii de ordinul întâi sunt, de exemplu, calculul predicatelor (fie în forma expusă mai sus (p. xii), i.e., al cărui limbaj conţine toate cele trei clase de simboluri (pentru predicate, pentru funcţii şi pentru constante), fie în forma calculului *pur* al predicatelor, în sensul mai sus specificat), sistemul axiomatic al Aritmeticii Peano (PA), sistemul axiomatic Robinson (Q) (un subsistem al PA).

[46]În termeni tehnici, mulţimea teoremelor sistemului nu este recursivă.

[47]Cititorul nefamiliarizat cu conceptele fundamentale ale teoriei recursiei poate omite, la o primă lectură, comentariile făcute pe această temă.

$\mathcal{T}$ se numeşte *recursiv nedecidabilă* dacă şi numai dacă mulţimea $Th_{\mathcal{T}}$ a numerelor Gödel ale teoremelor sale nu este recursivă.[48] $\mathcal{T}$ este *esenţial recursiv nedecidabilă* dacă şi numai dacă orice extensie consistentă a lui $\mathcal{T}$ este recursiv nedecidabilă. $\mathcal{T}$ se numeşte *axiomatizabilă* dacă şi numai dacă există o mulţime recursivă M de propoziţii (formule închise), astfel încât $\mathcal{T} = \{A \mid M \vdash A\}$ (i.e., $\mathcal{T}$ constă strict din toate formulele derivabile din M). Dacă M este finită, atunci $\mathcal{T}$ se numeşte *finit axiomatizabilă*. Sistemul axiomatic Q este un exemplu de teorie finit axiomatizabilă. $\mathcal{T}$ se numeşte *decidabilă* dacă şi numai dacă mulţimea $Th_{\mathcal{T}}$ este recursivă.

Acum, insolvabilitatea problemei deciziei pentru calculul pur al predicatelor înseamnă a arăta că mulţimea Th_{CP} nu este decidabilă (recursivă).[49] Schematic,[50] derivarea Teoremei lui Church are loc pe baza următoarelor rezultate teoretice:

R_1. Fie $\mathcal{T} \supseteq Q$ (i.e., $\mathcal{T}$ este o extensie consistentă a teoriei Q). Atunci mulţimea $Th_{\mathcal{T}}$ nu este recursivă.

Demonstraţia pentru R_1 se bazează pe co-extensivitatea conceptelor "exprimabilitate formală a unei mulţimi M în $\mathcal{T}$" şi "recursivitatea mulţimii M", plus lema diagonalizării, potrivit căreia dacă $A(x)$ este o formulă cu x liberă a $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ (i.e., a limbajului teoriei $\mathcal{T}$), atunci există o propoziţie G a $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ astfel încât $\mathcal{T} \vdash G \equiv A(\overline{g})$, unde g este numărul Gödel al lui G, iar $\overline{g}$ este numeralul corespunzător. Propoziţia G se numeşte *punct fix* al formulei $A(x)$. Iar M este exprimabilă formal în $\mathcal{T}$ dacă şi numai dacă există o formulă $A(x)$ a $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ astfel încât pentru orice n au loc

---

[48]Teoria $\mathcal{T}$ poate fi redată fie în forma axiomatică (axiome + reguli de deducţie), fie ca mulţimea tuturor teoremelor sale (caz în care axiomele sunt ele însele teoreme).

[49]Acesta este conţinutul Teoremei lui Church [1936], "A note on the Entscheidungsproblem", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, 40-41; Correction 101-102.

[50]Pentru detalii, comp. E. Mendelson [1964], *Introduction to Mathematical Logic*, D. van Nostand Company, Inc., Princeton, Ch. 3, Sect. 6; G. Boolos, J.P. Burgess, R.C. Jeffrey [2002], *Computability and Logic*, Fourth Ed., Cambridge Univ. Press, Ch. 17; S.C. Kleene [1964], §76, Theorem 54; A.M. Turing [1936-7], "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem", *Proc. Lond. Math. Soc.*, ser. 2, vol. 42, 230-265, A correction, vol. 43. 1937. 544-546.

(1) Dacă $n \in M$, atunci $\vdash A(\overline{n})$.
(2) Dacă $n \notin M$, atunci $\vdash \neg A(\overline{n})$.

(*Reductio*) Presupunem că $Th_{\mathcal{T}}$ este exprimabilă formal în $\mathcal{T}$ prin formula $\Theta(x)$, cu x liberă. Fie acum formula $\neg\Theta(x)$. Prin lema diagonală, $\neg\Theta(x)$ are un punct fix G, i.e.,
(*) $\quad \mathcal{T} \vdash G \equiv \neg\Theta(\overline{g})$.

Un argument simplu ne arată că în acest setting avem $\mathcal{T} \vdash G$. Căci dacă $\mathcal{T} \nvdash G$, atunci $g \notin Th_{\mathcal{T}}$ şi deci, prin (2), $\mathcal{T} \vdash \neg\Theta(\overline{g})$. Şi astfel, prin (*) $\vdash G$. Aşadar, $\mathcal{T} \vdash G$ (prin *reductio*). Şi deci $g \in Th_{\mathcal{T}}$, de unde, prin (1), $\mathcal{T} \vdash \Theta(\overline{g})$; i.e., $\mathcal{T}$ este inconsistentă (contra ipoteză). Aşadar, mulţimea $Th_{\mathcal{T}}$ nu este exprimabilă formal în $\mathcal{T}$ şi deci $Th_{\mathcal{T}}$ nu este recursivă. Aşadar, $\mathcal{T}$ este recursiv nedecidabilă. Şi astfel, Q este recursiv nedecidabilă. Mai mult, fiindcă $\mathcal{T}$ este o extensie consistentă arbitrară a lui Q, rezultă că Q este *esenţial* recursiv nedecidabilă.

R_2. Fie $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ două teorii axiomatizabile, formulate în limbajul Aritmeticii Peano (L_{PA}). Fie M_1 mulţimea axiomelor lui $\mathcal{T}_1$ iar $M_2 = M_1 \cup \{A_1, \ldots, A_n\}$ mulţimea axiomelor lui $\mathcal{T}_2$. Atunci, dacă $\mathcal{T}_2$ este recursiv nedecidabilă, atunci $\mathcal{T}_1$ este recursiv nedecidabilă.

Argument. Fie B o teoremă a $\mathcal{T}_2$. Atunci, avem $\mathcal{T}_2 \vdash B$ dacă şi numai dacă $\mathcal{T}_1 \cup \{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$ dacă şi numai dacă $\mathcal{T}_1 \vdash (A_1 \& \ldots \& A_n) \to B$ (prin Th. Herbrand şi Log. Prop.). Fie m numărul Gödel al formulei $A_1 \& \ldots \& A_n$ iar b numărul Gödel al formulei B. Atunci, evident

$$b \in Th_{\mathcal{T}_2} \text{ ddacă } m * 2^k * b \in Th_{\mathcal{T}_1},$$

unde "$*$" este funcţia recursivă a concatenării,[51] iar k este numărul Gödel al simbolului "$\to$". Fie f funcţia concatenării. Şi deci $b \in Th_{\mathcal{T}_2}$ ddacă $f(b) \in Th_{\mathcal{T}_1}$. Fiindcă f este recursivă, rezultă că dacă $Th_{\mathcal{T}_1}$ ar fi recursivă, atunci şi $Th_{\mathcal{T}_2}$ ar fi recursivă şi deci $\mathcal{T}_2$ ar fi recursiv decidabilă, contra ipoteză!

[51]Pentru detalii, comp. S.C. Kleene [1964], §46, 230-231.

Fie PRED calculul predicatelor formulat în $\mathcal{L}_{PA}$, fie PRED* calculul predicatelor al cărui limbaj conţine simboluri pentru funcţii şi constante, fie CP calculul pur al predicatelor, din PLM.

R_3. PRED este recursiv nedecidabil.

Argument. Întrucât Q este consistent (pentru că are modelul PA), PRED $\cup\, Q = Q$. Întrucât Q este o extensie *finită* a PRED, rezultă că PRED este recursiv nedecidabil (prin R_1 şi R_2).

R_3^*. PRED* este recursiv nedecidabil.

Argument. Observăm mai întâi că prin corectitudinea şi completitudinea calculului predicatelor, are loc

$$\text{PRED} \vdash A \text{ ddacă } \text{PRED}^* \vdash A,$$

deoarece avem: PRED $\vdash A$ ddacă $\models A$ şi PRED$^* \vdash A$ ddacă $\models A$. Ceea ce înseamnă că $Th_{\text{PRED}} = Th_{\text{PRED}^*}$ şi deci dacă Th_{PRED^*} ar fi recursivă, atunci şi Th_{PRED} ar fi recursivă, şi astfel PRED ar fi o teorie recursiv decidabilă, contra R_3.

R_4. Fie A o formulă arbitrară a $\mathcal{L}_{\text{PRED}^*}$, fie a numărul ei Gödel. Există o funcţie recursivă f astfel încât $f(a)$ este numărul Gödel al unei formule A' şi are loc: PRED$^* \vdash A$ ddacă CP $\vdash A'$.[52]

Teorema lui Church. CP este o teorie recursiv nedecidabilă.

Argument. Prin R_4 avem: $a \in Th_{\text{PRED}^*}$ ddacă $f(a) \in$ CP. Şi deci, fiindcă f este recursivă, dacă Th_{CP} ar fi recursivă, atunci şi Th_{PRED^*} ar fi recursivă, contra R_3^*. Aşadar, calculul pur al predicatelor este nedecidabil. De unde, prin Teorema corectitudinii şi cea a completitudinii CP, rezultă insolvabilitatea problemei deciziei pentru CP, în modul mai sus formulat.

Capitolul 4. Calculul extins al predicatelor

În esenţă, calculul extins al predicatelor înseamnă introducerea cuantificării pe variabile predicative, şi deci introducerea distincţiei liberelegate şi cu referire la acest tip de variabile. Conceptul "formulă" va fi

[52]Pentru demonstraţie comp. E. Mendelson [1964], Cap. 3, Sect. 6, Lemma 3.46.

deci extins corespunzător, rezultatul construcţiei fiind un calcul al predicatelor de ordin superior (doi, trei,...). Un astfel de calcul are o posibilitate sporită de expresie; e.g., principiul inducţiei matematice, relaţia de identitate, problema eliminării îşi găsesc aici reprezentarea lor simbolică.

Spre deosebire însă de calculul restrâns al predicatelor, sistemul axiomatic de calcul extins al predicatelor este unul incomplet.[53] Însă, similar celui restrâns, acest calcul este unul nedecidabil. Iar rezultate fundamentale privitoare la calculul restrâns al predicatelor, cu modificările aferente sunt valabile şi aici, e.g., teoremele privitoare la regula înlocuirii, principiul dualităţii, forma normală prenexă, construcţia contradictoriei unei formule.

Esenţial în construcţia calculului extins este faptul că simbolurile predicative pot figura ele însele ca argumente în construcţia formulelor, caz în care vom obţine expresii de un gen anume: predicatele de predicate. O primă aplicaţie a acestui calcul rezidă în analiza logică a conceptului de număr, introdusă iniţial de Frege. Numărul nu este un obiect ci trebuie înţeles ca o proprietate a acelui concept sub care sunt reunite obiectele numărate. De exemplu, faptul că numărul minunilor lumii antice este opt este o proprietate a predicatului "minune a lumii antice", şi nu înseamnă că opt revine fiecărei minuni. Un număr specificat este aşadar un predicat de predicate cu anumite proprietăţi. Acest tip de reprezentare a unui număr deschide posibilitatea redării simbolice a numerelor. Predicatul de predicate "1", de exemplu, poate fi redat astfel:

$$1(F) : \exists x(F(x) \wedge \forall y(F(y) \to x = y)).$$

Mai mult, de un real interes se bucură redarea şi demonstrarea axiomelor teoriei numerelor, utilizând acest aparat conceptual.[54]

[53] Cf. K. Gödel [1931], "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38, 173-198; retip. în K. Gödel [1986], *Collected Works*, vol. I, Oxford University Press, 144-195.

[54] Comp. *inter alia* A.N. Whitehead şi B. Russell [1910-1913], *Principia Mathematica*, Cambridge; B. Russell [1920], *Introduction to Math. Philosophy*, sec. ed., London.

Aşa cum orice mulţime poate fi definită printr-un predicat, respectiv predicatele pot fi înţelese ca mulţimi, tot astfel un predicat monadic de predicate se poate interpreta ca proprietare a mulţimilor. Şi, aferent, relaţia dintre mulţimi şi predicate trimite la relaţia dintre mulţimi de mulţimi şi predicate de predicate. Pe această cale toate conceptele teoriei mulţimilor îşi găsesc expresia lor simbolică în calculul extins al predicatelor, e.g., submulţime, reuniune, intersecţie, ordonare, axioma extensionalităţii.

Paradoxuri. Întrucât în calculul extins al predicatelor simbolurile predicative pot fi ele însele argumente ale simbolurilor predicative, acest calcul nu exclude posibilitatea unor construcţii de forma $P(P)$ sau $\neg P(P)$, ca predicate de P. Formulele de forma $\neg P(P)$ nu sunt însă deloc inofensive, deoarece conduc la aşa-numitele paradoxuri. Un astfel de paradox este Paradoxul lui Russell,[55] din teoria mulţimilor. Schematic, mulţimea tuturor mulţimilor se divide în două mulţimi: mulţimea tuturor mulţimilor care se conţin ca element, (e.g., mulţimea tuturor mulţimilor care au mai mult de 10 elemente) şi mulţimea tuturor mulţimilor care nu se conţin ca element (e.g., mulţimea tuturor numerelor pare). Simbolic: $M = \{x \mid x \in x\}$ şi $N = \{x \mid x \notin x\}$. Ne întrebăm acum: se conţine N ca element? Din modul în care N a fost definită rezultă următoarea inconsistenţă: $N \in N$ ddacă $N \notin N$. Uneori acest paradox este redat în termenii "proprietăţii" şi nu în termenii mulţimii.[56] Pe scurt, paradoxul este generat astfel. Un adjectiv se numeşte *autologic* dacă are proprietatea pe care o denotă (exprimă) (e.g., "polisilabic", "românesc"), în caz contrar se numeşte *heterologic* (e.g., "monosilabic", "Romanian").

[55]Menţionat pentru prima dată în *Gottlob Freges Briefwechsel*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1980, 59-60 (Russell an Frege, 16.6.1902); este un paradox set-teoretic.

[56]Este cunoscut ca "*Paradoxul lui Grelling*" sau "Paradoxul Heterologic"; cf. K. Grelling, L. Nelson [1908]; "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell and Burali-Forti", *Abhandlungen der Fries'schen Schule II*, Göttingen, 301-334. De altfel, cele trei paradoxuri (Russell, Grelling şi Paradoxul lui Epimenide) sunt reciproc reductibile; pentru detalii, comp. S. Kripke [1996] *Elementary Recursion Theory and its Applications to Formal Systems*, 54-56 (draft).

Ne întrebăm acum, este "heterologic" heterologic? Un argument simplu ne trimite la următorul paradox *"heterologic" este heterologic ddacă "heterologic" nu este heterologic.*

Să procedăm mai formal. Construcţia $\neg P(P)$ este un predicat de P, care exprimă proprietatea unui predicat de a nu-i reveni lui însuşi. Să numim acest predicat $\Phi(P)$. Şi deci pentru un predicat arbitrar P, $\Phi(P)$ este o propoziţie adevărată dacă şi numai dacă P nu revine lui însuşi. Pe modelul exemplului simplu de mai sus, să luăm pentru P chiar predicatul Φ. Aşadar obţinem construcţia $\Phi(\Phi)$. Derivarea paradoxului are loc astfel. Presupunem că $\Phi(\Phi)$ este o propoziţie adevărată. Deducem, prin definiţia lui Φ, că Φ nu revine lui însuşi, şi deci $\Phi(\Phi)$ este falsă. Iar dacă $\Phi(\Phi)$ este falsă, atunci, tot prin definiţia lui Φ, este fals că Φ nu revine lui Φ şi deci Φ revine lui Φ, i.e., $\Phi(\Phi)$ este adevărată. Aşadar $\Phi(\Phi)$ este adevărată ddacă $\Phi(\Phi)$ nu este adevărată.

Ceea ce ne arată paradoxurile este următorul lucru: utilizarea nediferenţiată a conceptului de "predicat" conduce, în anumite circumstanţe, la generarea paradoxurilor. De altfel, Russell va utiliza versiunea set-teoretică a paradoxului său tocmai pentru a demonstra inconsistenţa principiului comprehensiunii din teoria naivă a mulţimilor. Exprimat simbolic, acest principiu arată astfel: *Compr* $\exists y \forall x(x \in y \equiv A(x))$, unde $A(x)$ este o formulă arbitrară a limbajului teoriei mulţimilor, cu x variabilă liberă şi în care y nu apare. Dacă pentru $A(x)$ luăm formula $x \notin x$, atunci derivăm $\forall x(x \in y \equiv x \notin x)$. De unde, pentru $x = y$ derivăm $y \in y \equiv y \notin y$. Pentru evitarea acestor construcţii paradoxale s-a apelat la diferite strategii, e.g., introducerea distincţiei nete între limbajul unei teorii [matematice] şi metalimbajul ei,[57] conversia structurilor paradoxale în rezultatele teoretice consistente cunoscute sub numele de teoremele incompletitudinii,[58] fie în forma sistematică a *teoriei tipurilor*

[57]Cf. A. Tarski [1935], "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Studia Phil.*, Vol. 1, 261-405; also in A. Tarski [1956], *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford.

[58]Cf. K. Gödel [1931]; comp. şi D. Hilbert, P. Bernays [1939], §5.; S.C. Kleene [1964], §42.

logice.[59] Potrivit acestei teorii, argumentele unui predicat trebuie să fie întotdeauna de ordin mai mic decât predicatul însuşi. Aceasta înseamnă introducerea următoarei ierarhizări: indivizi (obiecte) ale căror nume figurează ca argumente de predicate, predicate de indivizi, ale căror locuri pentru argumente sunt ocupate de nume de indivizi; acestea sunt *predicate de ordinul întâi.* Un *predicat de ordinul doi* este un predicat în care cel puţin un loc pentru argumente este ocupat de un predicat de indivizi iar celelalte locuri sunt ocupate de nume de indivizi. Şi astfel putem continua cu *predicate de ordinul trei, patru* etc. Această ierarhizare a predicatelor o întâlnim în *teoria simplă* a tipurilor logice, teorie utilizată de Hilbert în investigaţiile sale privitoare la fundamentele matematicii. În prima ediţie a celebrei *Principia Mathematica* găsim însă şi o teorie *ramificată* a tipurilor logice, cu o ierarhizare mai complexă a predicatelor, teorie elaborată în vederea eliminării paradoxurilor semantice. Menţionăm doar că această teorie este complet dispensabilă în raport cu intenţia elaborării sale, dacă se adoptă strategia tarskiană mai sus menţionată, cea a deosebirii între limbaj obiect şi metalimbaj în analiza limbajelor formale.

Consideraţiile de mai sus cu privire la calculul extins al predicatelor stau la baza unei construcţii axiomatice a acestui calcul, similară axiomatizării calculului restrâns, în raport cu care calculul extins este, în esenţă, o extensie. Dată fiind înglobarea ideii ierahizării predicatelor, calculul extins, astfel obţinut, se mai numeşte şi calculul de ordin ω. Cum spuneam mai sus, acest calcul are o putere de expresie mărită în raport cu calculul restrâns. O aplicaţie a calculului extins în analiza fundamentelor teoriei numerelor reale ilustrează, în fine, în mod exemplar acest lucru în PLM.

Prin câmpul tematic investigat, prin definirea riguroasă a conceptelor sintactice şi semantice, prin bogăţia de teoreme demonstrate, toate acestea fac din *Principiile Logicii Matematice*, elaborată de D. Hilbert şi W. Ackermann, o creaţie remarcabilă în domeniul logico-matematic.

V.D.

[59] Cf. A.N. Whitehead, B. Russell [1910-1913].

D. HILBERT **W. ACKERMANN**

PRINCIPIILE LOGICII MATEMATICE

Prefaţă la prima ediţie

Cartea de faţă tratează logica matematică (numită şi logica simbolică, calcul logic sau algebra logicii), într-o formă pe care am dezvoltat-o şi utilizat-o în prelegerile mele universitare despre principiile fundamentale ale matematicii (*Principiile Matematicii*, semestrul de iarnă 1917/18; *Calcul Logic*, semestrul de vară 1920; *Fundamentele Matematicii*, semestrul de iarnă 1921/22). În pregătirea prelegerilor menţionate am fost în mod substanţial sprijinit şi sfătuit de colegul meu P. Bernays. Tot el este şi cel care a redactat, în modul cel mai îngrijit posibil, aceste prelegeri. Prin utilizarea şi completarea materialului astfel constituit, W. Ackermann, un student de-al meu, care între timp s-a evidenţiat prin lucrări importante, elaborate autonom, în domeniul fundamentelor matematicii, a realizat structurarea de faţă şi forma definitivă a întregului conţinut.

Cartea de faţă va servi totodată pregătirii şi facilitării înţelegerii unei alte cărţi, pe care P. Bernays şi eu intenţionăm s-o edităm cât mai curând şi care tratează fundamentele matematicii prin acele metode pe care eu (de asemenea sub activa cooperare a lui P. Bernays) le-am expus într-o serie de studii (*Neubegründung der Mathematik*, Abhandlungen des mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität, Vol. 1, p. 157, 1922; *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, Math. Ann., Vol. 88, p. 151, 1922; *Über das Unendliche*, Math. Ann., Vol. 95, p. 161, 1925).

Göttingen, 16 Ianuarie 1928

Hilbert

Prefaţă la ediţia a doua

La cea de-a doua ediţie a *Principiilor Logicii Matematice* s-au păstrat integral structura şi forma primei ediţii. Însă progresele ştiinţifice care s-au făcut între timp au făcut necesară o revizie riguroasă şi includerea diferitelor îmbunătăţiri şi adăugiri, fără ca prin aceasta cadrele fixate pentru carte să fi fost depăşite.

Capitolele 1 şi 2 au rămas esenţial neschimbate, abstracţie făcând de o scurtă considerare a investigaţiilor recente cu privire la axiomatica calculului propoziţional, expuse în Capitolul 1. S-a renunţat totuşi la o extensie a prezentării calculului clasial în Capitolul 2, care ar fi fost de dorit prin ea însăşi, întrucât, la urma urmei, acest calcul, în arhitectonica de ansamblu a cărţii, ocupă o poziţie izolată. În Capitolul 3, înainte de toate, a fost îmbunătăţită formularea regulilor de inferenţă pentru calculul predicatelor, a căror formulare de până acum nu era suficient de precisă. Demonstraţii de independenţă şi completitudine a sistemului axiomatic utilizat acolo au fost nou adăugate iar secţiunea despre problema deciziei a fost suplimentată prin considerarea unor rezultate noi. Capitolul 4 a putut fi prescurtat, în măsura în care un recurs la teoria ramificată a tipurilor logice, a lui Russell şi Whitehead, nu mai era necesar, după ce aceasta a fost abandonată la modul aproape general. În acest fel construcţia calculului de ordinul doi şi cea a calculului de ordin ω au fost în mod considerabil îmbunătăţite şi rotunjite.

Terminologia a fost adaptată la cea din *Grundlagen der Mathematik*, de Hilbert şi Bernays. De exemplu, expresia ”calcul funcţional” a fost înlocuită peste tot cu ”calculul predicatelor”. În acord cu utilizarea logică generală, expresiile ”sumă logică” şi ”produs logic” au fost peste tot schimbate cu ”conjuncţie” şi ”disjuncţie”.

Domnului P. Bernays (Zürich), care a şi citit şpalturile, îi sunt îndatorat în mod special pentru numeroasele sfaturi. Pentru diferitele propuneri şi indicaţii sunt recunoscător şi domnilor G. Gentzen (Göttingen), care a şi examinat manuscrisul, Arnold Schmidt (Marburg) şi H. Scholz (Münster). Tuturor acestora le ofer cele mai cordiale mulţumiri.

Burgsteinfurt, Noiembrie, 1937

W. Ackermann

Cuprins

Introducere

Logica matematică, numită şi *logică simbolică*, sau *calcul logic*, este o extensie a metodei formale din matematică în domeniul logicii. Ea foloseşte pentru logică un limbaj formal similar celui uzual de multă vreme pentru exprimarea relaţiilor matematice. În matematică ar trece astăzi drept o utopie intenţia de a se folosi doar de limba obişnuită în construcţia unei discipline matematice. Marile progrese care au fost făcute în matematică, de exemplu în algebră, începând cu antichitatea, sunt condiţionate în mod esenţial de faptul că s-a izbutit găsirea unui formalism utilizabil şi eficient. Ceea ce prin limbajul formal s-a obţinut în matematică trebuie să fie realizat, prin acest limbaj formal, şi în logica matematică, şi anume o tratare ştiinţifică exactă a obiectului ei. Stările de lucruri logice care există între judecăţi, concepte etc. îşi găsesc reprezentarea lor prin formule a căror interpretare este liberă de neclarităţile care pot uşor să apară într-o expresie a limbajului obişnuit. Trecerea la consecinţele logice, aşa cum survine ea prin inferenţă, este descompusă în elementele sale ultime şi apare ca o transformare formală a formulelor iniţiale în acord cu anumite reguli, analoge regulilor de calcul din algebră; gândirea logică îşi află imaginea sa într-un *calcul logic*. Acest calcul face posibilă o atacare cu succes a problemelor în raport cu care gândirea logică pur intuitivă dă principial rateuri. Acestor probleme le aparţine de exemplu întrebarea cum se pot caracteriza propoziţiile care pot fi derivate din premise date. În ultimele decade calculul logic a dobândit o semnificaţie specială, prin faptul că s-a dezvoltat ca un instrument indispensabil pentru cercetarea fundamentelor matematicii.

Ideea unei logici matematice a fost formulată într-o formă clară mai întâi de către Leibniz. Primele rezultate au fost obţinute de A. de Morgan (1806-1876) şi G. Boole (1815-1864). Întreaga dezvoltare ulterioară se originează în Boole. Dintre succesorii săi, W.S. Jevons (1835-1882) şi înainte de toate C.S. Peirce (1839-1914) sunt cei care au îmbogăţit tânăra ştiinţă. Diferitele rezultate ale predecesorilor săi au fost sistematic organizate şi completate de Ernst Schröder în a sa *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890-1895), care reprezintă o anumită finalizare a seriei dezvoltărilor care se originează în Boole.

În parte independent de dezvoltarea algebrei Boole-Schröder logica simbolică a căpătat un nou impuls prin aspiraţiile matematicii spre o fundamentare exactă şi o tratare axiomatică riguroasă. G. Frege a publicat lucrarea sa *Begriffsschrift* (1879) şi lucrarea *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903). G. Peano şi colaboratorii săi au început în 1894 publicarea acelei *Formulaire de Mathématique*, în care toate disciplinele matematice au trebuit prezentate în termenii calculului logic. Apariţia acelei *Principia Mathematica* (1910-1913) a lui A.N. Whitehead şi B. Russell reprezintă un punct culminant al acestei dezvoltări. Cel mai recent, într-o serie de lucrări şi conferinţe universitare Hilbert a utilizat calculul logic pentru a ajunge pe o nouă cale la o construcţie a matematicii, care face posibilă recunoaşterea consistenţei postulatelor adoptate. Primul raport cuprinzător despre aceste cercetări a apărut în primul volum al *Grundlagen der Mathematik* (1934) al lui D. Hilbert şi P. Bernays.

CAPITOLUL 1

Calculul propoziţional

O primă şi indispensabilă parte componentă a logicii matematice o reprezintă aşa-numitul calcul propoziţional. Printr-o propoziţie se înţelege orice expresie despre care se poate afirma cu sens că conţinutul său este adevărat sau fals. Propoziţii sunt, de exemplu, "Matematica este o ştiinţă", "Zăpada este neagră", "9 este un număr prim". În calculul propoziţional nu se intră în structura logică mai fină a propoziţiilor, aşa cum este ea expusă, de exemplu, în relaţia dintre subiect şi predicat, ci propoziţiile sunt considerate ca întregi în conexiunea lor logică cu alte propoziţii.

1. Introducerea conectorilor logici fundamentali

Propoziţiile pot fi conectate (combinate) într-un mod precis pentru a forma noi propoziţii. De exemplu, din cele două propoziţii "2 este mai mic decât 3" şi "Zăpada este neagră" se pot forma propoziţii noi: "2 este mai mic decât 3 *şi* zăpada este neagră", "2 este mai mic decât 3 *sau* zăpada este neagră", *Dacă* 2 este mai mic decât 3, *atunci* zăpada este neagră". În fine, din "2 este mai mic decât 3" se poate forma o nouă propoziţie: "2 *nu* este mai mic decât 3", care exprimă opusul logic al primei propoziţii.

Aceste combinaţii de propoziţii sunt redate lingvistic prin cuvintele: "*şi*", "*sau*", "*dacă–atunci*", "*non*".

Vrem acum să redăm aceste combinaţii fundamentale de propoziţii printr-un simbolism adecvat. Drept simboluri pentru propoziţii vom folosi majusculele latine X, Y, Z, U, ... Pentru redarea combinaţiilor logice de propoziţii vom introduce următoarele cinci simboluri:

1. $\overline{X}$ (se citeşte "*non-X*") simbolizează opusa sau contradictoria lui X. $\overline{X}$ înseamnă propoziţia care este adevărată dacă X este falsă, şi este falsă dacă X este adevărată.

2. $X\&Y$ (se citeşte "*X şi Y*") simbolizează propoziţia care este adevărată dacă şi numai dacă atât X, cât şi Y sunt adevărate.

3. $X \vee Y$ (se citeşte "*X sau Y*") simbolizează propoziţia care este adevărată dacă şi numai dacă cel puţin una din cele două propoziţii X, Y este adevărată.

4. $X \rightarrow Y$ (se citeşte "*dacă X, atunci Y*") simbolizează propoziţia care este falsă dacă şi numai dacă X este adevărată şi Y este falsă.

5. $X \sim Y$ (se citeşte "*X este echivalent cu Y*"), scrisă şi $X \rightleftarrows Y$ sau $X \leftrightarrow Y$, simbolizează propoziţia care este adevărată dacă şi numai dacă X şi Y sunt ambele adevărate sau ambele false. $X \sim Y$ înseamnă aşadar că X şi Y au aceeaşi valoare de adevăr.

Cu privire la 3, să remarcăm faptul că "sau" în combinaţia "$X \vee Y$" nu trebuie confundat cu exclusivul "sau", în sensul latinescului *aut–aut*. Acest "sau" are mai degrabă semnificaţia de "sau şi", în sensul latinescului *vel*; i.e., posibilitatea existenţei simultane a lui X şi Y fiind admisă.[1]

Relaţia "dacă X, atunci Y" nu trebuie înţeleasă ca şi când cu aceasta ar trebui simbolizat un raport dintre temei şi consecinţă. Mai degrabă, propoziţia $X \rightarrow Y$ este întotdeauna adevărată dacă X este o propoziţie falsă sau dacă Y este o propoziţie adevărată.

Aşadar, de exemplu, următoarele propoziţii trebuie considerate ca adevărate:

"*Dacă* 2 ori 2 este egal cu 4, *atunci* zăpada este albă".

"*Dacă* 2 ori 2 este egal cu 5, *atunci* zăpada este albă".

"*Dacă* 2 ori 2 este egal cu 5, *atunci* zăpada este neagră".

Dimpotrivă, propoziţia "Dacă 2 ori 2 este egal cu 4, atunci zăpada este neagră" ar fi falsă. Oricum, relaţia $X \rightarrow Y$ şi relaţia dintre temei şi

[1]Disjuncţia exclusivă "sau... sau" poate fi exprimată printr-o combinaţie de simboluri fundamentale. "Sau X, sau Y" este negaţia echivalenţei $X \sim Y$ şi este redată prin $\overline{X \sim Y}$.

consecinţă au comun faptul că în cazul adevărului lui $X \to Y$, din faptul că X are loc poate fi inferat faptul că Y are loc.

Relaţia $X \sim Y$ nu are sensul că X şi Y au aceeaşi semnificaţie; mai degrabă ea are loc între oricare două propoziţii adevărate şi între oricare două propoziţii false. E.g. propoziţiile (2 plus 2 fac 4) $\sim$ (zăpada este albă) şi $(2 > 3) \sim$ (zăpada este neagră) sunt adevărate.

În fine, de o importanţă specială este următoarea remarcă. Potrivit definiţiei noastre a conectorilor logici fundamentali, *adevărul sau falsitatea unei combinaţii propoziţionale depinde doar de adevărul şi falsitatea propoziţiilor conectate, şi nu de conţinutul lor.* Dacă în vederea abrevierii o propoziţie adevărată o vom simboliza cu A iar una falsă cu F, atunci, de exemplu, conectorul $\to$ va fi caracterizat astfel: propoziţiile $A \to A$, $F \to A$, $F \to F$ sunt adevărate iar $A \to F$ este falsă. Pentru conectorul &, $A\&A$ este adevărată; $A\&F$, $F\&A$, $F\&F$ sunt toate false. Apoi, $A \vee A$, $A \vee F$, $F \vee A$ sunt adevărate; $F \vee F$ este falsă. Conectorul $\sim$ este caracterizat prin faptul că $A \sim A$ şi $F \sim F$ sunt adevărate iar $A \sim F$ şi $F \sim A$, dimpotrivă, sunt false. În fine, $\overline{T}$ este falsă, $\overline{F}$ este adevărată. Suntem aşadar îndreptăţiţi să considerăm conectorii fundamentali ca funcţii de adevăr, i.e., ca funcţii definite pentru care ca argumente şi ca valori ale funcţiilor doar A şi F intră în discuţie.

Drept caracterizare formală a operaţiilor introduse, trebuie remarcat faptul că negaţia, $\overline{X}$, este singura operaţie unară, pe când toate celelalte sunt binare.

2. Echivalenţe; Dispensabilitatea conectorilor fundamentali

Printr-o aplicaţie repetată a conectorilor fundamentali, din propoziţiile date se pot construi combinaţii mai complicate de propoziţii. Astfel rezultă, de exemplu, din propoziţiile elementare X, Y, Z propoziţia compusă $((X \to Y)\&(Y \to Z))\&(X \vee Z)$. Orice astfel de combinaţie de propoziţii reprezintă, exact ca în cazul conectorilor fundamentali, o anumită funcţie de adevăr. În cazul combinaţiei propoziţionale de mai sus,

pentru X, Y, Z avem opt posibilităţi de combinare a valorilor lor: T, T, T; T, T, F; T, F, T; T, F, F; F, T, T; F, T, F; F, F, T; F, F, F. Prin intermediul

$$((X \to Y)\&(Y \to Z))\&(X \vee Z)$$

fiecărei astfel de combinaţii îi corespunde fie valoarea T, fie valoarea F. De exemplu, combinaţiei F, T, F îi corespunde F; deoarece, în acord cu definiţia conectorilor fundamentali, pentru $((F \to T)\&(T \to F))\&(F \vee F)$ putem pune $(T\&F)\&F$, iar apoi $(F\&F)$ şi deci, în fine, F.

De remarcat este faptul că diferite combinaţii de conectori fundamentali pot avea aceeaşi semnificaţie, i.e., pot reprezenta aceeaşi funcţie de adevăr. Astfel, $\overline{\overline{X}}$ are aceeaşi semnificaţie ca X; dubla negaţie este aceeaşi cu afirmaţia. De fapt, $\overline{\overline{X}}$, exact la X, dă valoarea T prin substituţia lui X cu T, şi F prin substituţia lui X cu F. Astfel de combinaţii propoziţionale cu aceeaşi semnificaţie le vom numi, în cele ce urmează, "echivalente". Abreviat, vom scrie

$$\overline{\overline{X}} \text{ eq } X.^2 \tag{1}$$

În cele ce urmează vom da o serie de alte echivalenţe. Mai întâi, se poate constata o analogie între modul în care operează simbolurile & şi $\vee$ şi modul în care simbolurile $+$ şi $\cdot$ operează în algebră. Respectiv, au loc următoarele echivalenţe:

$$X\&Y \text{ eq } Y\&X, \tag{2}$$

$$X\&(Y\&Z) \text{ eq } (X\&Y)\&Z, \tag{3}$$

$$X \vee Y \text{ eq } Y \vee X, \tag{4}$$

$$X \vee (Y \vee Z) \text{ eq } (X \vee Y) \vee Z, \tag{5}$$

$$X \vee (Y\&Z) \text{ eq } (X \vee Y)\&(X \vee Z). \tag{6}$$

[2]Trebuie remarcat faptul că abrevierea utilizată aici, "eq", nu aparţine simbolurilor noastre logice.

Aşa cum rezultă deja din cele spuse mai sus, adevărul acestor echivalenţe (şi al tuturor celorlalte) se verifică în următorul mod: se iau toate combinaţiile posibile care se pot construi înlocuind propoziţiile elementare cu T şi F şi ne convingem de faptul că pentru fiecare combinaţie individuală ambele laturi ale echivalenţei considerate dau, de fiecare dată, aceeaşi valoare de adevăr. Această verificare o lăsăm în seama cititorului.

Din echivalenţele (2)-(6) rezultă o lege a *comutativităţii*, a *asociativităţii* şi a *distributivităţii*. În virtutea acestei analogii cu algebra, $X\&Y$ a fost numită şi *sumă logică*, iar $X \vee Y$ *produs logic*. Din legile menţionate rezultă că în cazul expresiilor logice, într-un mod similar celui din algebră, putem "multiplica în afară", respectiv putem scoate (afară) un factor comun. De altfel, la fel de bine am fi putut numi $X\&Y$ produs logic iar $X \vee Y$ sumă logică, această denumite fiind chiar una uzuală în logică. Spre deosebire de algebră, este valabilă însă şi o a *doua lege a distributivităţii*, respectiv

(7) $$X\&(Y \vee Z) \text{ eq } (X\&Y) \vee (X\&Z).$$

Un exemplu în vederea clarificării celei de-a doua legi a distributivităţii este cel care urmează. Fie următoarea prognoză a vremii: "Astăzi va ploua iar mâine sau poimâine va străluci soarele". Aceeaşi aserţiune se poate exprima şi astfel: "Astăzi va ploua şi mâine va străluci soarele sau astăzi va ploua şi poimâine va străluci soarele".

Întrucât utilizarea limbii în logică, cu privire la termenii "sumă" şi "produs", este fluctuantă, vom prefera în general să evităm aceste expresii. În schimb $X\&Y$ o vom numi *conjuncţia* lui X şi Y iar $X \vee Y$ o vom numi *disjuncţia* lui X şi Y. Pentru $X \rightarrow Y$ numele uzual este *implicaţie*.

Date fiind legile comutativităţii şi asociativităţii, conjuncţiile şi disjuncţiile cu mai mulţi membri pot fi scrise fără paranteze. În continuare, pentru eliminarea parantezelor introducem următoarea convenţie: $\vee$ *leagă mai tare decât* & iar & *mai tare decât* $\rightarrow$ şi $\sim$. Similar simbolului $\cdot$ din algebră, simbolul $\vee$ poate fi şi omis.

Pentru simplificarea conjuncţiilor şi disjuncţiilor, următoarele echivalenţe sunt esenţiale:

(8) $$X\&X \text{ eq } X,$$

(9) $$X \vee X \text{ eq } X.$$

Aşadar, într-o conjuncţie sau disjuncţie în care un membru apare de mai multe ori, trebuie scris doar o dată. De asemenea, următoarele echivalenţe sunt adecvate pentru înlocuirea combinaţiilor propoziţionale mai complicate cu unele mai simple.

(10) $$X\&T \text{ eq } X,$$

(11) $$X\&F \text{ eq } F.$$

Expresia (10) spune că un membru adevărat al conjuncţiei poate fi întotdeauna omis, iar (11) că o conjuncţie în care apare o propoziţie falsă este falsă.

Corespunzător, pentru disjuncţie vom avea:

(12) $$X \vee T \text{ eq } T,$$

(13) $$X \vee F \text{ eq } X.$$

Dacă o disjuncţie conţine un membru adevărat, atunci ea este adevărată. Într-o disjuncţie un membru fals poate fi omis.

Şi pentru implicaţie vom avea relaţii asemănătoare:

(14) $$T \to X \text{ eq } X,$$

(15) $$F \to X \text{ eq } T.$$

O implicaţie cu antecedent adevărat este echivalentă cu consecventul ei. O implicaţie cu antecedent fals reprezintă întotdeauna o propoziţie adevărată.

În fine, pentru relaţia de echivalenţă avem:

(16) $$X \sim T \text{ eq } X,$$

(17) $$X \sim F \text{ eq } \overline{X}.$$

Pentru legătura negaţiei cu & şi $\vee$ următoarea relaţie este esenţială:

(18) $$\overline{X \& Y} \text{ eq } \overline{X} \vee \overline{Y}.$$

De exemplu, fie X aserţiunea "Triunghiul Δ este dreptunghic", iar Y "Triunghiul Δ este isoscel". Atunci, combinaţiei $X \& Y$ îi corespunde propoziţia: "Triunghiul Δ este dreptunghic şi triunghiul Δ este isoscel". Opusa ei contradictorie este: "Triunghiul Δ nu este dreptunghic sau triunghiul Δ nu este isoscel", iar această propoziţie este redată prin $\overline{X} \vee \overline{Y}$.

Are loc, de asemenea

(19) $$\overline{X \vee Y} \text{ eq } \overline{X} \& \overline{Y}.$$

De exemplu, la un examen în matematică se cere ca respectivul candidat să fie bine pregătit în cel puţin unul dintre domeniile aritmetică şi geometrie. Fie X propoziţia: "Candidatul este competent în aritmetică" iar Y: "Candidatul este competent în geometrie". Cerinţa examenului este satisfăcută de candidat dacă $X \vee Y$ este adevărată. Acum, dacă candidatul cade la examen, atunci cazul opus al $X \vee Y$ are loc, iar acest lucru înseamnă: "Candidatul nu este competent în aritmetică şi nu este competent în geometrie", fapt redat prin $\overline{X} \& \overline{Y}$.

Alte echivalenţe rezultă dacă includem în analiză şi simbolurile $\rightarrow$ şi $\sim$.

Întrucât propoziţia $X \rightarrow Y$ înseamnă că nu au loc simultan X adevărată şi Y falsă, vom avea

(20) $$X \rightarrow Y \text{ eq } \overline{X \& \overline{Y}}.$$

Aplicând (18), $\overline{X \& \overline{Y}}$ poate fi scrisă şi $\overline{X} \vee \overline{\overline{Y}}$, iar prin (1) şi $\overline{X} \vee Y$. Aşadar, are loc şi

(21) $$X \rightarrow Y \text{ eq } \overline{X} \vee Y.$$

Dacă în această echivalenţă se ia $\overline{X}$ în loc de X şi se utilizează faptul că $\overline{\overline{X}}$ eq X, atunci se obţine o nouă relaţie

(22) $$X \vee Y \text{ eq } \overline{X} \rightarrow Y.$$

În acord cu (20), $\overline{Y} \to \overline{X}$ eq $\overline{\overline{Y}\&\overline{\overline{X}}}$. Prin (1) pentru aceasta se poate pune $\overline{\overline{Y}\&X}$; iar prin (2) $\overline{X\&\overline{Y}}$; iar prin (20) $X \to Y$. Rezultă aşadar:

(23) $$X \to Y \text{ eq } \overline{Y} \to \overline{X}.$$

Apoi, dacă ambele propoziţii $X \to Y$ şi $Y \to X$ sunt adevărate, aceasta înseamnă că nu avem simultan X adevărată şi Y falsă şi nici simultan Y adevărată şi X falsă. Propoziţia $(X \to Y)\&(Y \to X)$ înseamnă aşadar că X şi Y au, ambele, aceeaşi valoare de adevăr. Cu alte cuvinte, are loc echivalenţa

(24) $$X \sim Y \text{ eq } (X \to Y)\&(Y \to X).$$

Din semnificaţia conectorului $\sim$ rezultă nemijlocit că au loc

(25) $$X \sim Y \text{ eq } Y \sim X,$$

(26) $$X \sim Y \text{ eq } \overline{X} \sim \overline{Y}.$$

Apoi, din (19) şi (18), dacă în ambele laturi ale echivalenţei se iau contradictoriile şi se aplică faptul că, în acord cu (1), dubla negaţie poate fi omisă, se pot obţine:

(27) $$X \vee Y \text{ eq } \overline{\overline{X}\&\overline{Y}},$$

(28) $$X\&Y \text{ eq } \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}.$$

În aceste echivalenţe se arată o *diversitate în redarea combinaţiilor de propoziţii cu ajutorul simbolurilor introduse*. Se ridică firesc întrebarea dacă nu cumva *unii dintre conectorii logici fundamentali sunt dispensabili*. Acesta este într-adevăr cazul. Mai întâi, din (24) rezultă că simbolul $\sim$ este dispensabil, întrucât combinaţia $X \sim Y$ se poate reda prin $\to$ şi &. Apoi, din (20) şi (27) rezultă că şi $\to$ şi $\vee$ sunt dispensabile; şi deci că & şi $^{-}$ sunt suficiente. De asemenea, din (21) şi (28) rezultă că şi $\vee$ şi $^{-}$ sunt suficiente. Tot astfel, $\to$ şi $^{-}$ sunt suficiente, dat fiind faptul că, prin (28), mai întâi & se poate exprima prin $\vee$ şi $^{-}$ iar prin (22) $\vee$ se poate exprima prin $\to$ şi $^{-}$.

Frege a pus la bază formularea cu $\rightarrow$ şi $^{-}$, iar Russell formularea cu $\vee$ şi $^{-}$ (prin utilizarea totuşi a altor simboluri). Probabil cel mai natural este să se plece de la reprezentarea prin & şi $^{-}$, aşa cum apare ea în teoria lui Brentano a judecăţii. Oportună în mod special este utilizarea celor trei simboluri, &, $\vee$, $^{-}$, întrucât în virtutea echivalenţelor (2)-(6) rezultă o tratare remarcabil de simplă a calculului cu expresiile logice.

Nu toate combinaţiile pot fi redate cu $\sim$ şi $^{-}$. Astfel, deja $X\&Y$ nu poate fi redată cu aceste simboluri. Pentru demonstraţie vom presupune mai întâi că vom utiliza doar propoziţiile elementare X şi Y. Să considerăm apoi următoarele 8 propoziţii:

$$X;\ Y;\ \overline{X};\ \overline{Y};\ X \sim X;\ X \sim \overline{X};\ X \sim Y;\ X \sim \overline{Y}.$$

Dacă se neagă una din aceste propoziţii sau dacă se conectează două din aceste propoziţii prin $\sim$, atunci se obţin, din nou, propoziţii care sunt echivalente uneia din cele 8 propoziţii. De exemplu, $(X \sim Y) \sim Y$ eq X; $(X \sim Y) \sim (X \sim Y)$ eq $X \sim X$ ş.a.m.d. Întrucât propoziţiile elementare X şi Y apar ele însele printre cele 8 propoziţii, rezultă că orice propoziţie care este construită din X şi Y doar prin utilizarea $\sim$ şi $^{-}$ este echivalentă uneia dintre aceste 8 propoziţii. Însă $X\&Y$ nu este echivalentă cu niciuna dintre aceste 8 propoziţii. Dacă ar exista o combinaţie de propoziţii echivalentă cu $X\&Y$ şi construită doar cu $\sim$ şi $^{-}$, şi care conţine în plus propoziţiile elementare $Z, U, \ldots, T$, atunci echivalenţa ar trebui să aibă loc şi în cazul în care $Z, U, \ldots, T$ sunt înlocuite toate cu X. Cu aceasta ne întoarcem la cazul precedent.

Negaţia este indispensabilă în redarea combinaţiilor de propoziţii. De exemplu, $\overline{X}$ nu poate fi redată fără folosirea negaţiei. Căci toate expresiile construite cu simbolul nedefinit X prin aplicarea &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ generează doar propoziţii care sunt adevărate dacă X este adevărată, pe când $\overline{X}$ are valoarea de adevăr opusă valorii lui X.

De remarcat este faptul că conectorul $\vee$ poate fi exprimat doar prin $\rightarrow$, fără utilizarea negaţiei. Respectiv, are loc

$$X \vee Y \text{ eq } (X \rightarrow Y) \rightarrow Y.$$

Pentru $X\&Y$ o expresie de acest fel nu este posibilă.

Drept curiozitate să menţionăm faptul că este suficient şi un singur simbol logic, aşa cum a arătat Sheffer. El utilizează ca singur conector fundamental X/Y, în cuvinte: ”X şi Y nu sunt ambele adevărate”. Atunci, X/X are aceeaşi semnificaţie cu $\overline{X}$. $(X/X)/(Y/Y)$ este echivalentă cu $\overline{X}/\overline{Y}$, i.e., $X \vee Y$. Întrucât $\vee$ şi $^{-}$ se pot exprima prin bara lui Sheffer, acest lucru este valabil şi pentru restul conectorilor fundamentali.

Pentru reprezentarea relaţiei ”a avea aceeaşi valoare de adevăr” vom menţiona ca importante şi următoarele echivalenţe:

$$X \sim Y \text{ eq } \overline{X} \vee Y \& \overline{Y} \vee X, \tag{29}$$

$$X \sim Y \text{ eq } (X\&Y)(\overline{X}\&\overline{Y}). \tag{30}$$

Expresia (29) rezultă din (24), prin exprimarea conectorului $\rightarrow$ în termenii $\vee$ şi $^{-}$, în acord cu (21). Expresia (30) rezultă imediat din semnficaţia conectorului $\sim$.

3. Forma normală pentru expresiile logice

Până acum am văzut cum din anumite propoziţii elementare, pe care le-am denotat cu $X, Y, Z, \ldots$, noi propoziţii se pot forma prin una sau mai multe aplicaţii ale conectorilor $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $^{-}$. Echivalenţele expuse în paragraful precedent ne arată că pentru combinaţiile de propoziţii elementare, echivalente intuitiv, există o diversitate de expresii, astfel încât de la una la alta se poate trece după cum dorim. De remarcat este acum faptul că orice *combinaţie de propoziţii, prin transformări echivalente, poate fi adusă la o anumită formă normală*; respectiv, această formă normală constă dintr-o conjuncţie de disjuncţii, în care fiecare membru al disjuncţiei este fie o propoziţie elementară, fie negaţia unei propoziţii elementare.

Pe baza echivalenţelor expuse, vom stabili următoarele reguli pentru transformarea expresiilor:

a1) *Cu simbolurile* $\&$ *şi* $\vee$ *putem calcula asociativ, comutativ şi distributiv, ca în algebră.*

a2) $\overline{\overline{X}}$ *poate fi înlocuită cu* X.

a3) *Pentru* $\overline{X\&Y}$ *se poate scrie* $\overline{X} \vee \overline{Y}$, *iar pentru* $\overline{X \vee Y}$ *se poate scrie* $\overline{X}\&\overline{Y}$.

a4) $X \to Y$ *poate fi înlocuită cu* $\overline{X} \vee Y$, *iar* $X \sim Y$ *cu* $\overline{X}Y\&\overline{Y}X$.[3]

Întotdeauna, aici, este avută în vedere şi posibilitatea înlocuirii converse.

Acum, transformarea are loc în următorul mod: mai întâi, prin utilizarea Regulii a4), orice expresie poate fi înlocuită cu una echivalentă, dar care nu mai conţine simbolurile $\to$ şi $\sim$. Atunci, expresia rezultantă este construită doar prin utilizarea a trei simboluri: $\&$, $\vee$ şi $^{-}$. Prin aplicaţii succesive ale Regulii a3) se poate ajunge apoi ca simbolurile negaţiei să fie mutate succesiv în interiorul expresiei, pentru ca, în fine, acestea să stea doar deasupra propoziţiilor elementare. De exemplu, din

$$\overline{(XY\&\overline{Y}) \vee (Z\&Y)}$$

vom avea mai întâi

$$(\overline{XY\&\overline{Y}})\&(\overline{Z\&Y}),$$

iar apoi, printr-o altă aplicaţie a a3):

$$\overline{XY} \vee \overline{\overline{Y}}\&\overline{Z} \vee \overline{Y}$$

şi, în fine

$$(\overline{X}\&\overline{Y})\overline{\overline{Y}}\&\overline{Z}\;\overline{Y}.$$

Atunci, expresia astfel rezultantă se compune din propoziţii elementare negate şi nenegate, conectate prin $\&$ şi $\vee$. Se aplică acum legea distributivităţii. În exemplul nostru se obţine astfel

$$\overline{X}\;\overline{\overline{Y}}\&\overline{Y}\;\overline{\overline{Y}}\&\overline{Z}\;\overline{Y}.$$

În fine, dacă prin a2) vom înlocui $\overline{\overline{X}}$ cu X, $\overline{\overline{\overline{X}}}$ cu $\overline{X}$ ş.a.m.d., atunci expresia este adusă în forma normală.

[3]Aici şi în cele ce urmează vom utiliza frecvent notaţia convenabilă deja menţionată, prin care simbolul $\vee$ este omis.

Ca un al doilea exemplu, vom considera expresia

$$(X \to Y) \sim (\overline{Y} \to \overline{X}).$$

Dacă, aici, prin a4) se elimină mai întâi simbolul $\to$, atunci se obţine

$$\overline{X}Y \sim \overline{\overline{\overline{Y}}}\ \overline{X}.$$

Vom înlocui $\overline{\overline{\overline{Y}}}$ cu Y:

$$\overline{X}Y \sim Y\overline{X}.$$

Dacă repetăm aplicarea Regulii a4), se obţine

$$(\overline{\overline{X}Y})Y\overline{X}\&(\overline{Y\overline{X}})\overline{X}Y,$$

$$(\overline{\overline{X}}\&\overline{Y})Y\overline{X}\&(\overline{Y}\&\overline{\overline{X}})\overline{X}Y \quad \text{[prin a3)]}.$$

Vom înlocui $\overline{\overline{X}}$ cu X:

$$(X\&\overline{Y})Y\overline{X}\&(\overline{Y}\&X)\overline{X}Y.$$

Prin aplicarea legii distributivităţii vom avea atunci

$$XY\overline{X}\&\overline{Y}Y\overline{X}\&\overline{Y}\ \overline{X}Y\&X\overline{X}Y.$$

Aceasta este forma normală a expresiei $(X \to Y) \sim (\overline{Y} \to \overline{X})$.

Să remarcăm de altfel faptul că forma normală aparţinătoare unei combinaţii de propoziţii nu este unică. De exemplu, pe de-o parte, prin (29), expresiei $X \sim Y$ îi aparţine forma normaă $\overline{X}Y\&\overline{Y}X$. Pe de altă parte, dacă se aplică legea distributivităţii la partea dreaptă a (30), atunci se obţine

$$X\overline{X}\&X\overline{Y}\&Y\overline{X}\&Y\overline{Y}.$$

4. Caracterizarea combinaţiilor logic adevărate de propoziţii

Dacă o combinaţie de propoziţii, care se compune într-un anumit fel din propoziţiile elementare $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cu ajutorul simbolurilor logice &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, $\bar{}$, este adevărată sau falsă, acest lucru depinde doar de modul în care adevărul şi falsul se distribuie propoziţiilor elementare. Valoarea de adevăr a unei combinaţii propoziţionale rămâne neschimbată dacă o propoziţie componentă este înlocuită cu alta care are aceeaşi valoare de adevăr. De altfel, de aici rezultă că simbolul $\sim$ în calculul nostru joacă un rol similar simbolului = din algebră.

Acum, prima sarcină a logicii este aceea *de a găsi acele combinaţii de propoziţii care sunt logic adevărate, i.e., sunt adevărate independent dacă propoziţiile elementare reprezintă afirmaţii adevărate sau false.*

Întrucât pentru orice expresie logică putem găsi una echivalentă ei, aflată în forma normală, soluţia la această problemă se reduce la *a decide când o expresie în forma normală reprezintă o combinaţie propoziţională logic adevărată.* Constatarea acestui fapt are loc cu ajutorul următoarelor reguli, uşor de verificat:

b1) $X\overline{X}$ este logic adevărată.

b2) Dacă X este adevărată iar Y denotă o propoziţie arbitrară, atunci şi XY este adevărată.

b3) Dacă X este adevărată şi Y este adevărată, atunci şi $X\&Y$ este adevărată.

Aceste reguli trebuie înţelese în aşa fel încât X şi Y pot fi substituite cu propoziţii şi combinaţii propoziţionale arbitrare.

În acord cu regulile b1), b2), b3) şi a1), *toate expresiile caracterizate prin faptul că în fiecare disjuncţie cel puţin una din propoziţiile elementare apare împreună cu negaţia ei sunt considerate ca fiind adevărate.* Faptul că o expresie de acest gen reprezintă o propoziţie adevărată indiferent de conţinutul propoziţiilor elementare rezultă şi nemijlocit din semnificaţia negaţiei şi cea a conectorilor "şi" şi "sau". Acestea sunt însă şi singurele expresii care sunt logic adevărate. Căci dacă într-un membru al conjuncţiei unei forme normale, care are desigur forma unei disjuncţii,

fiecare propoziţie elementară apare ca factor fie doar nenegată, fie doar negată, atunci această disjuncţie poate fi făcută o propoziţie falsă, dacă pentru simbolurile propoziţionale nenegate se substituie propoziţii false iar pentru cele negate propoziţii adevărate. Atunci un conjunct al formei normale reprezintă o propoziţie falsă şi astfel întreaga expresie trebuie să reprezinte o propoziţie falsă, indiferent de ceea ce se substituie pentru simbolurile propoziţionale încă nedeterminate.

Prin câteva exemple vom arăta cum se verifică propoziţiile ca fiind logic adevărate prin metoda mai sus indicată.

1. $X \sim X$.

Prin Regula a4) transformarea dă următorul rezultat:

$$\overline{X}X \& \overline{X}X.$$

Această expresie, în forma normală, conţine în fiecare conjunct o propoziţie elementară şi negaţia ei, şi este aşadar adevărată.

2. $X \& Y \rightarrow X$.

Transformarea dă următorul rezultat:

$$\overline{X \& Y} \vee X \quad \text{[prin a4)]}$$

$$\overline{X}\ \overline{Y}X \qquad \text{[prin a3)]}.$$

Această disjuncţie conţine X şi $\overline{X}$ şi este deci adevărată.

3. $(X \& (X \rightarrow Y)) \rightarrow Y$.

Se obţine

$$\overline{X \& \overline{\overline{X}Y}} \vee Y \qquad \text{[printr-o dublă aplicaţie a a4)]},$$
$$\overline{X}(\overline{\overline{X}} \& \overline{Y})Y \qquad \text{[prin a3)]},$$
$$\overline{X}\ \overline{\overline{X}}Y \& \overline{X}\ \overline{Y}Y \qquad \text{[prin a1)]},$$
$$\overline{X}XY \& \overline{X}\ \overline{Y}Y \qquad \text{[prin a2)]}.$$

Prima disjuncţie conţine X şi $\overline{X}$ iar cea de-a doua Y şi $\overline{Y}$. Aşadar, $(X \& (X \rightarrow Y)) \rightarrow Y$ este o combinaţie propoziţională logic adevărată.

5. Principiul dualităţii

O importantă remarcă cu privire la caracterizarea calculului nostru priveşte Regula a3). Din această regulă se poate conchide că *dintr-o expresie care este formată doar din propoziţii elementare şi negaţiile lor, prin intermediul conectorilor conjuncţie şi disjuncţie, se poate obţine contradictoria ei prin schimbarea reciprocă a simbolurilor & şi ∨ şi prin înlocuirea propoziţiilor elementare cu negaţiile lor.*

De acest fapt ne putem prevala în următoarea aplicaţie. Fie o expresie de forma $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, sau cum mai putem spune, o ecuaţie logică, stabilită ca fiind logic adevărată. (Vom folosi literele germane pentru a denota combinaţiile de propoziţii a căror configuraţie formală exactă este lăsată nedeterminată, câteodată şi în vederea abrevierii.) Fiindcă $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ este echivalentă cu $\overline{\mathfrak{A}} \sim \overline{\mathfrak{B}}$, vom obţine din nou o expresie adevărată dacă construim negaţia ambelor laturi ale ecuaţiei. Acum, dacă ambele părţi ale ecuaţiei sunt formate din propoziţii elementare şi negaţiile lor doar prin conjuncţie şi disjuncţie, putem aplica regula tocmai menţionată. Vom obţine astfel o formulă care rezultă din ecuaţia iniţială $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ prin înlocuirea reciprocă a simbolurilor & şi ∨ şi a propoziţiilor elementare cu negaţiile lor. Întrucât această formulă este logic adevărată, ea rămâne logic adevărată dacă substituim fiecare propoziţie elementară cu negaţia sa. Procedând astfel, anulăm însă înlocuirea iniţială a propoziţiilor elementare cu negaţiile lor.

În acest fel obţinem următorul *Principiu al Dualităţii*: *Dintr-o formulă* $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$*, care este logic adevărată şi ale cărei ambe laturi sunt formate din propoziţii elementare şi negaţiile lor doar prin conectorii conjuncţie şi disjuncţie, se obţine o altă ecuaţie adevărată prin înlocuirea reciprocă a & şi* ∨.

Aşa este, de exemplu,

$$X(Y\&Z) \sim XY\&XZ$$

o formulă logic adevărată. Ea este formula primei legi a distributivităţii. În acord cu principiul dualităţii, din ea se derivează formula

$$X\&YZ \sim (X\&Y)(X\&Z),$$

care este de asemenea adevărată şi care este o doua lege a distributivităţii.

În mod similar, formulei adevărate

$$(X\&\overline{X})Y \sim Y$$

îi este asociată, prin principiul dualităţii, formula de asemenea adevărată

$$X\overline{X}\&Y \sim Y.$$

6. Forma normală disjunctivă pentru expresiile logice

De regula construirii negaţiei se poate face uz într-o importantă aplicaţie. Am văzut că fiecare expresie logică poate fi adusă la o formă normală. Această formă normală constă dintr-o conjuncţie de disjuncţii, unde fiecare membru al disjuncţiei este o propoziţie elementară negată sau nenegată. Transformarea unei expresii în forma ei normală se face cu ajutorul Regulilor a1)-a4). Pe lângă această formă normală există însă şi o a *doua formă normală*, care constă dintr-o disjuncţie de conjuncţii. Fiecare membru al conjuncţiei este o propoziţie elementară negată sau nenegată. Această formă normală o vom numi "*disjunctivă*" iar cea precedentă "*conjunctivă*", pentru a le putea deosebi.

Transformarea unei expresii în forma normală disjunctivă se poate executa în următorul mod: se neagă expresia originală, se aduce apoi la forma normală conjunctivă şi, în fine, se construieşte din nou negaţia formulei astfel obţinute în acord cu regula noastră. Se poate apela şi la faptul că, referitor la Regulile a1)-a4), conjuncţia şi disjuncţia sunt în raport de dualitate.

Aşa cum din forma normală conjunctivă se poate determina dacă o expresie este logic adevărată sau nu, tot astfel cu ajutorul celei disjunctive se poate decide dacă ea este sau nu o falsitate logică. Iar acesta este cazul dacă şi numai dacă fiecare membru al disjuncţiei conţine o propoziţie elementară împreună cu negaţia ei.

Demonstraţia acestui fapt rezultă de-ndată, dacă se are în vedere faptul că negaţia unei forme normale disjunctive este redată printr-o formă normală conjunctivă şi că o formulă este logic falsă dacă şi numai dacă negaţia ei este logic adevărată.

Drept exemplu pentru aplicarea formei normale disjunctive vom considera combinaţia propoziţională

$$\overline{X}Y\&\overline{Y}Z\&X\&\overline{Z}.$$

Prin aplicarea celei de-a doua legi a distributivităţii se obţine forma normală

$$(\overline{X}\&\overline{Y}\&X\&\overline{Z}) \vee (\overline{X}\&Z\&X\&\overline{Z}) \vee (Y\&\overline{Y}\&X\&\overline{Z}) \vee (Y\&Z\&X\&\overline{Z}).$$

Aici fiecare membru al disjuncţiei conţine o propoziţie elementară şi negaţia ei, primele două X şi $\overline{X}$, a treia Y şi $\overline{Y}$ iar a patra Z şi $\overline{Z}$. Aşadar, $\overline{X}Y\&\overline{Y}Z\&X\&\overline{Z}$ reprezintă o propoziţie care este logic falsă.

Forma normală disjunctivă are avantajul unei clarităţi speciale. Membrii individuali ai disjuncţiei indică diferitele posibilităţi în care combinaţia propoziţională dată este adevărată. Astfel, de exemplu, forma normală disjunctivă care aparţine formulei $X \sim Y$ se citeşte $(X\&Y)(\overline{X}\&\overline{Y})$, iar aceasta ne permite să recunoaştem că X şi Y trebuie să fie ori ambele adevărate, ori ambele false pentru ca $X \sim Y$ să fie adevărată.

7. Varietatea combinaţiilor propoziţionale care pot fi construite din propoziţii elementare date

O altă remarcă importantă despre calcul se referă la varietatea propoziţiilor care pot fi construite prin combinaţia unui număr finit de propoziţii elementare $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Aici vom considera ca distincte doar acele propoziţii care nu sunt echivalente logic. Sub această asumpţie varietatea constă doar dintr-un număr finit de propoziţii.

Aşa cum am menţionat mai sus, o propoziţie construită din $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este echivalentă cu o altă propoziţie de acest fel dacă

şi numai dacă ambele propoziţii au aceeaşi valoare de adevăr pentru valori arbitrare ale propoziţiilor elementare $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Mai întâi, pentru adevărul sau falsitatea propoziţiilor elementare intră în discuţie 2^n posibilităţi, întrucât fiecare propoziţie individuală $X_1, X_2, \ldots, X_n$ poate fi adevărată sau falsă. Acum, o propoziţie compusă din $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este definită prin aceea că pentru fiecare dintre cele 2^n cazuri se poate determina dacă ea este adevărată sau falsă. Există, aşadar, exact $2^{(2^n)}$ propoziţii diferite care pot fi compuse din $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Cele 4 propoziţii diferite, construite doar cu X, sunt

$$X;\ \overline{X};\ X \vee \overline{X};\ X \& \overline{X}.$$

Cele 16 propoziţii diferite, care se pot construi din X şi Y, sunt

$$X;\ Y;\ X \& Y;\ X \vee Y;\ X \to Y;\ Y \to X;\ X \sim Y;\ X \vee \overline{X}$$

şi negaţiile lor

$$\overline{X};\ \overline{Y};\ \overline{X} \vee \overline{Y};\ \overline{X} \& \overline{Y};\ X \& \overline{Y};\ Y \& \overline{X};\ X \sim \overline{Y};\ X \& \overline{X}.$$

Dintre cele $2^{(2^n)}$ propoziţii, două au un statut special, şi anume propoziţia logic adevărată, care este exprimabilă, de exemplu, prin $X_1 \vee \overline{X}_1$ (sau $X_1 \sim X_1$), şi cea logic falsă, care se poate exprima prin $X_1 \& \overline{X}_1$.

O privire formală de ansamblu asupra propoziţiilor distincte care se pot construi cu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se obţine prin următoarea teoremă:

Orice expresie construită din propoziţiile elementare $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este echivalentă cu o conjuncţie parţială a următoarei expresii dezvoltate în acord cu prima lege a distributivităţii:

$$(X_1 \& \overline{X}_1) \vee (X_2 \& \overline{X}_2) \vee \ldots \vee (X_n \& \overline{X}_n).$$

O excepţie o constituite doar expresiile logic adevărate.

Însă şi conjuncţia parţială improprie, care rezultă prin omisiunea tuturor membrilor ei, poate fi considerată ca o expresie logic adevărată. Membrii conjuncţiei expresiei de mai sus, odată dezvoltată, Schröder îi numeşte *constituenţii* lui $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Demonstraţia pentru această aserţiune are loc în modul următor: Mai întâi, expresia construită cu $X_1, \ldots, X_n$ se aduce la forma normală conjunctivă. Întrucât valoarea de adevăr a unei expresii rămâne neschimbată dacă un membru adevărat al conjuncţiei este omis, atunci membrii conjuncţiei care conţin un X şi negaţia sa $\overline{X}$ nu mai trebuie scrişi. Dacă se utilizează apoi regula că în loc de $X \vee X$ trebuie scris doar X, atunci fiecare dintre conjuncţii rămaşi este o disjuncţie cu membri distincţi din şirul $X_1, \ldots, X_n, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$. Dacă într-o disjuncţie lipseşte atât X_i cât şi $\overline{X}_i$, atunci această disjuncţie o putem extinde cu membrul logic fals $(X_i \& \overline{X}_i)$ şi, din nou, aplicăm prima lege a distributivităţii, fără ca valoarea de adevăr a întregii propoziţii să se schimbe. Atunci fiecare membru al conjuncţiei conţine, pentru orice i, fie X_i, fie $\overline{X}_i$. Apoi, dintre membrii conjuncţiei care se deosebesc între ei doar prin ordinea diferită a membrilor conectaţi prin $\vee$, va trebui să scriem doar unul. Cu aceasta expresia a obţinut forma dorită.

Pentru orice expresie construită din $X_1, X_2, \ldots, X_n$ am obţinut astfel o reprezentare printr-o *formă normală conjunctivă "perfectă"*.

Această formă normală este unică (excepţie făcând o permutare a membrilor conjuncţiei sau membrilor disjuncţiei), în sensul că două combinaţii propoziţionale echivalente sunt reprezentabile prin aceeaşi formă normală. Căci pentru $X_1, \ldots, X_n$ există $2^{(2^n)}$ expresii diferite în forma normală, aşadar, la fel de multe ca propoziţiile diferite care se pot construi din $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Forma normală perfectă admite cele mai variate aplicaţii. Mai întâi, ea poate uneori servi la găsirea unei *reprezentări mai simple* pentru o combinaţie propoziţională dată. Pentru acest scop expresia dată este adusă în forma normală perfectă iar apoi, dacă este cazul, se simplifică prin aplicarea următoarei *reguli a eliminării*:

$$X\mathfrak{A} \& \overline{X}\mathfrak{A}, \text{ i.e., } (X \& \overline{X}) \vee \mathfrak{A}$$

este echivalent cu $\mathfrak{A}$.

Drept exemplu, să considerăm combinaţia de propoziţii $A\&AB$. Pentru a obţine dezvoltarea în raport cu A şi B, înlocuim membrul A al conjuncţiei prin $A \vee (B\&\overline{B})$ şi eliminăm parantezele în acord cu prima lege a distributivităţii. Dacă membrul AB, care apare de două ori, se scrie o dată, atunci se obţine forma normală perfectă:

$$AB\&A\overline{B}.$$

Dacă aici A se scoate "factor comun", atunci se obţine $A(B\&\overline{B})$, iar în acord cu regula eliminării, dată mai sus, A. Aşadar, A este cea mai simplă reprezentare pentru $A\&AB$.

Un alt exemplu este dat de expresia $A\&\overline{A}B$. Aici ca formă normală se obţine:

$$AB\&A\overline{B}\&\overline{A}B.$$

Aici se pot aduce laolaltă primul membru şi al doilea, respectiv primul şi al treilea. Pentru a putea executa ambele eliminări, primul membru îl vom scrie de două ori:

$$(AB\&A\overline{B})\&(AB\&\overline{A}B).$$

Prin eliminare obţinem $A\&B$.

Să mai remarcăm faptul că din forma normală perfectă, mai sus utilizată, se poate observa dacă *o propoziţie compusă din propoziţiile elementare $X_1, X_2, \ldots, X_n$ poate fi reprezentată fără utilizarea simbolului negaţiei.* Acest lucru are loc dacă şi numai dacă conjunctul $\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee \ldots \vee \overline{X}_n$ nu apare ca membru în forma normală perfectă a propoziţiei considerate. Căci dacă avem o propoziţie care se compune din $X_1, X_2, \ldots, X_n$ fără negaţie, atunci această propoziţie este adevărată în cazul în care $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se substituie cu propoziţii adevărate. O propoziţie care conţine $\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee \ldots \vee \overline{X}_n$ ca membru al conjuncţiei nu are însă această proprietate. Aşadar, condiţia mai sus menţionată este una necesară. Pe de altă parte, această condiţie este şi suficientă, deoarece orice membru al formei normale perfecte, care nu este egal cu $\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee \ldots \vee \overline{X}_n$, se poate exprima fără negaţie.

De exemplu, $X_1\overline{X}_2\overline{X}_3\ldots\overline{X}_n$ se poate scrie ca $(X_2\&X_3\&\ldots\&X_n)\to X_1$; $X_1\overline{X}_2X_3\overline{X}_4X_5\overline{X}_6\ldots$ ca $(X_2\&X_4\&X_6\&\ldots)\to X_1\vee X_3\vee X_5\vee\ldots$, ş.a.m.d.

Prin urmare, exact jumătate din $2^{(2^n)}$ propoziţii care pot fi construite din $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt exprimabile fără negaţie.

8. Remarci suplimentare la problema validităţii universale şi a satisfiabilităţii

Forma normală perfectă dată mai sus pentru o expresie care se compune din propoziţiile elementare $X_1, X_2, \ldots, X_n$, o vom numi, pe scurt şi *dezvoltarea expresiei în raport cu* $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Fie acum dată o combinaţie de propoziţii în care în afară de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mai apar şi propoziţiile elementare $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Şi în cazul unei expresii de acest gen putem vorbi, într-un anume sens, de dezvoltarea în raport cu $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Respectiv, expresia se poate reda ca o *conjuncţie în care fiecare membru al conjuncţiei este disjuncţia unei expresii care depinde doar de* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ *şi unul dintre constituenţii lui* $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Demonstraţia este foarte simplă. Trebuie doar să dezvoltăm expresia în raport cu toate propoziţiile elementare care apar, i.e., în raport cu $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$, iar membrii care conţin aceiaşi constituenţi cu referire la $X_1, X_2, \ldots, X_n$ îi aducem laolaltă.

Această dezvoltare a unei expresii în raport cu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oferă anumite avantaje. Am văzut că decizia asupra *validităţii universale a unei expresii*, i.e., problema de a decide printr-o procedură efectivă, finită, dacă o expresie logică dată este sau nu logic adevărată, este complet soluţionată în calculul propoziţional. Răspunsul la această întrebare se poate găsi printr-o transformare în forma normală conjunctivă. Dualul problemei validităţii universale este problema *satisfiabilităţii*, i.e., problema de a decide dacă o expresie logică dată este logic falsă sau dacă există propoziţii care o satisfac, i.e., pentru care ea este adevărată. Soluţia

acestei probleme poate fi găsită prin transformarea în forma normală disjunctivă sau, alternativ, negaţia expresiei se poate aduce la forma normală conjunctivă. Cu aceste probleme ale validităţii universale, respectiv satisfiabilităţii, se conectează acum şi alte problematizări similare.

Fie dată o expresie în care apar propoziţiile elementare $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$. Fie $Y_1, \ldots, Y_m$ simboluri care denotă aici propoziţii definite fixate. Ne întrebăm acum, ce condiţie trebuie să satisfacă $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ pentru ca expresia să fie adevărată pentru o alegere arbitrară a propoziţiilor X? Respectiv, sub ce condiţii pentru $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ expresia este întotdeauna falsă?

Pentru răspunsul la aceste întrebări, în vederea simplificării, să presupunem că n este egal cu 2. Pentru n arbitrar soluţia este una analoagă. Fie dezvoltarea expresiei în raport cu X_1 şi X_2 următoarea:

(A) $\Phi_1(Y_1, \ldots, Y_m)X_1X_2 \& \Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m)X_1\overline{X}_2 \&$
$\Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m)\overline{X}_1X_2 \& \Phi_4(Y_1, \ldots, Y_m)\overline{X}_1\overline{X}_2.$

Aici putem presupune că toţi cei 4 membri apar efectiv. Dacă, de exemplu, membrul cu $X_1\overline{X}_2$ ar lipsi, atunci se adaugă o expresie $\Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m)X_1\overline{X}_2$, în care $\Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m)$ este o combinaţie propoziţională logic adevărată.

Acum asertăm: *Pentru ca formula* (A) *să fie adevărată pentru X_1 şi X_2 arbitrare, este necesar şi suficient ca propoziţia*

$\Phi_1(Y_1, \ldots, Y_m) \& \Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m) \& \Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m) \& \Phi_4(Y_1, \ldots, Y_m)$
să fie adevărată.

Faptul că această condiţie este suficientă, este clar. Ea este însă şi necesară, căci dacă, de exemplu, $\Phi_3(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ nu ar fi adevărată, atunci am putea înlocui X_1 cu o propoziţie adevărată iar X_2 cu una falsă. (A) este atunci echivalentă cu $\Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m)$, aşadar nu este adevărată.

Corespunzător stau lucrurile cu soluţia problemei duale. Expresia (A) este satisfiabilă în $X_1, \ldots, X_n$ dacă şi numai dacă $Y_1, \ldots, Y_m$ sunt astfel încât

$\Phi_1(Y_1, \ldots, Y_m) \vee \Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m) \vee \Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m) \vee \Phi_4(Y_1, \ldots, Y_m)$
este adevărată.

9. Privire sistematică asupra derivării tuturor consecinţelor din axiome date

În §4 am obţinut o metodă care ne-a dat posibilitatea de a găsi toate combinaţiile de propoziţii care sunt adevărate pe temeiuri pur logice, iar în cazul unei combinaţii propoziţionale date de a decide dacă ea este sau nu de acest fel. Acum se iveşte o *altă problemă*: *aceea de a deriva din ipoteze* (*axiome*) *date toate consecinţele, într-atât cât este posibil acest lucru, când propoziţiile sunt considerate doar ca întregi nedecompozabili.*

Presupunem că ne sunt date un număr finit, specificat, de axiome $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$.[4] La întrebarea dacă o altă combinaţie anume $\mathfrak{C}$ de propoziţii reprezintă o consecinţă logică a acestor axiome se poate întru totul răspunde cu mijloacele de până acum. Iar acesta este cazul dacă şi numai dacă $(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \ldots \& \mathfrak{A}_n) \to \mathfrak{C}$ este o formulă logică universal validă. De exemplu, deducţiei lui B din A şi $A \to B$ îi corespunde validitatea universală a formulei

$$(A \& (A \to B)) \to B.$$

Însă, nu avem încă o privire sistematică asupra tuturor consecinţelor care se pot trage. Pentru aceasta ne ajută abia forma normală conjunctivă perfectă.

Fie $X_1, \ldots, X_n$ propoziţiile elementare care apar în axiomele noastre. Presupunem acum că toate axiomele sunt conectate prin & iar combinaţia propoziţională astfel rezultantă o dezvoltăm în raport cu $X_1, \ldots, X_n$. Vom lua apoi orice constituent al $X_1, X_2, \ldots, X_n$ care în forma normală perfectă astfel apărută nu apare ca membru al conjuncţiei. Printr-o substituţie adecvată de propoziţii adevărate, respectiv false pentru $X_1, \ldots, X_n$ acest constituent se poate transforma într-o disjuncţie care conţine doar propoziţii false, aşadar într-o propoziţie falsă. Pe de altă parte, prin această substituţie forma noastră normală perfectă trece într-o propoziţie adevărată; deoarece fiecare dintre membrii conjuncţiei ei se deosebeşte de constituentul considerat prin aceea că cel puţin într-un

[4] Despre utilizarea literelor germane, comp. §5.

loc un membru al disjuncţiei este înlocuit cu opusul său. Constituentul considerat nu este aşadar o consecinţă logică a axiomelor. De aici rezultă că pentru orice consecinţă din axiome forma ei normală perfectă conţine doar acei constituenţi care au apărut deja în dezvoltarea ipotezei.*

Prin aplicarea acestei constatări, pentru derivarea consecinţelor dintr-un sistem de axiome rezultă următoarea metodă generală:

Se conectează toate axiomele prin & iar pentru expresia rezultantă se construieşte forma normală conjunctivă perfectă. Acum, dintre conjuncţi se pot alege oricare şi se conectează prin & şi astfel se obţin, în forma normală conjunctivă perfectă, toate consecinţele axiomelor. Adesea, cu ajutorul regulii eliminării, menţionată în §7, se pot obţine expresii şi mai simple pentru consecinţe.

În cazul mai sus menţionat, unde A şi $A \rightarrow B$ sunt luate ca axiome, metoda arată astfel: Mai întâi, $A\&(A \rightarrow B)$ este dezvoltată în raport cu A şi B.

$$A\&(A \rightarrow B) \text{ eq } A\&\overline{A}B,$$

$$A\&\overline{A}B \text{ eq } A(B\&\overline{B})\&\overline{A}B,$$

$$A(B\&\overline{B})\&\overline{A}B \text{ eq } AB\&A\overline{B}\&\overline{A}B.$$

$AB\&A\overline{B}\&\overline{A}B$ reprezintă forma normală perfectă pentru axiome. $AB\&\overline{A}B$ eq $(A\&\overline{A})B$ eq B este o consecinţă a axiomelor.

Celelalte consecinţe care se pot obţine din A şi $A \rightarrow B$ sunt: AB; $A\overline{B}$; $\overline{A}B$; $AB\&A\overline{B}$ eq $A(B\&\overline{B})$ eq A; $A\overline{B}\&\overline{A}B$ eq $A \sim B$ şi, desigur, $AB\&A\overline{B}\&\overline{A}B$ eq $A\&B$. Dacă, în plus, se vrea obţinerea de consecinţe în care apare şi o altă propoziţie C, care nu apare în axiome, atunci ipoteza se dezvoltă în raport cu A, B, C în loc de A şi B.

Un alt exemplu este următorul: Fie date două axiome, $A \sim B$ şi $B \sim C$. Vom scrie mai întâi axiomele în forma normală:

$$\overline{A}B\&\overline{B}A; \ \overline{B}C\&\overline{C}B.$$

*I.e., a formulei obţinute prin construcţia formei normale perfecte a conjuncţiei axiomelor. (Toate notele de subsol marcate cu $*$ sunt notele traducătorului).

Se dezvoltă ipoteza în raport cu A, B şi C, şi se obţine:

$$AB\overline{C}\&A\overline{B}C\&A\overline{B}\ \overline{C}\&\overline{A}BC\&\overline{A}B\overline{C}\&\overline{A}\ \overline{B}C.$$

O consecinţă aici este, de exemplu:

$$AB\overline{C}\&A\overline{B}\ \overline{C}\&\overline{A}BC\&\overline{A}\ \overline{B}C.$$

Prin "scoaterea de factor comun" rezultă:

$$A\overline{C}(B\&\overline{B})\&\overline{A}C(B\&\overline{B}),\quad \text{sau}\quad A\overline{C}\&\overline{A}C,\ \text{i.e.},\ A\sim C.$$

Vom da încă două exemple cu privire la aplicarea unei astfel de metode de derivare a consecinţelor.

Fie A propoziţia "Orice număr real este algebric" iar B "Mulţimea numerelor reale este numărabilă". În matematică următoarele rezultate au loc:

Primul: $A\rightarrow B$, i.e., "Dacă orice număr real este algebric, atunci mulţimea numerelor reale este numărabilă".

Al doilea: $\overline{B}$, i.e., "Mulţimea numerelor reale nu este numărabilă".

Ipoteza aici este:

$$\overline{A}B\&\overline{B}$$

sau în forma dezvoltată:

$$\overline{A}B\&A\overline{B}\&\overline{A}\ \overline{B}.$$

Aici una din consecinţe este $\overline{A}B\&\overline{A}\,\overline{B}$ eq $\overline{A}(B\&\overline{B})$ eq $\overline{A}$. I.e., găsim: "Nu orice număr real este algebric". Aceasta este concluzia că există numere transcendente.*

Ca un al doilea exemplu, fie A, B, C următoarele propoziţii:

A: "Legea adiţiei vectoriale a vitezelor este validă."

B: "În sistemul stelelor fixe lumina se propagă cu aceeaşi viteză în toate direcţiile."

C: "Pe pământ lumina se propagă în toate direcţiile cu aceeaşi viteză."

---

*I.e., numere care nu pot fi soluţii ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi raţionali; e.g. π şi e.

Mai întâi, următoarea propoziţie matematică are loc: $(A\&B) \to \overline{C}$, i.e., "Dacă legea adiţiei vectoriale a vitezelor este validă şi în sistemul stelelor fixe lumina se propagă cu aceeaşi viteză în toate direcţiile, atunci pe pământ lumina nu se propagă în toate direcţiile cu aceeaşi viteză."

Apoi, din experienţa fizică conchidem că B şi C sunt adevărate. Avem aşadar axiomele:

$$(A\&B) \to \overline{C};\ B;\ C.$$

În forma normală conjunctivă ipoteza arată astfel:

$$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\&B\&C,$$

iar dezvoltată:

$$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\&BAC\&BA\overline{C}\&B\overline{A}C\&B\overline{A}\ \overline{C}\&CA\overline{B}\&C\overline{A}\ \overline{B}.$$

Aici, drept consecinţă rezultă:

$$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\&B\overline{A}\ \overline{C}\&B\overline{A}C\&\overline{B}\ \overline{A}C.$$

Prin "factorizare" se obţine

$$(\overline{B}\&B)\overline{A}\ \overline{C}\&(B\&\overline{B})\overline{A}C,$$

$$\overline{A}\ \overline{C}\&\overline{A}C,$$

$$(\overline{C}\&C)\overline{A},$$

$$\overline{A}.$$

Drept consecinţă rezultă aşadar că legea adiţiei vectoriale a vitezelor nu este validă.

Din două axiome care se contrazic reciproc poate fi demonstrată orice propoziţie. Dacă, de exemplu, A şi $\overline{A}$ sunt luate ca axiome iar B este orice altă propoziţie, atunci dezvoltarea ipotezei $A\&\overline{A}$ în raport cu A şi B este:

$$AB\&A\overline{B}\&\overline{A}B\&\overline{A}\ \overline{B},$$

din care rezultă

$$AB\&\overline{A}B,$$

şi astfel B.

Metoda mai sus descrisă ne dă posibilitatea de a deriva toate consecinţele din axiome date sau, cu alte cuvinte, de a găsi toate combinaţiile propoziţionale care sunt *mai slabe* decât una dată. Convers, se poate pune întrebarea care combinaţii propoziţionale sunt *mai tari* decât una dată, i.e., din care ipoteze rezultă ea drept consecinţă. Soluţia acestei probleme se poate da într-un mod similar celui de mai sus: Mai întâi, consecinţa se dezvoltă în raport cu toate propoziţiile elementare, este aşadar adusă în forma normală perfectă. Apoi, se aleg oricare din constituenţii care nu apar, se adaugă cu & consecinţei şi se obţin astfel toate ipotezele posibile.

10. Axiomele calculului propoziţional

Forma axiomatică a teoriei calculului propoziţional se obţine făcând o selecţie din combinaţiile propoziţionale logic adevărate iar apoi dând regulile formale în acord cu care toate celelalte formule logic adevărate se pot deduce din cele selectate. În calculul logic aceste reguli joacă acelaşi rol pe care în teoriile matematice şi fizice îl are inferenţa logică. Faptul că inferenţa logică nu poate fi folosită aici în sensul intuitiv uzual rezidă în aceea că tipurile de inferenţă logică constituie ele însele obiectul investigaţiei noastre.

Vom deosebi între *formulele logice primitive* (axiomele) şi *regulile primitive pentru deducţia formulelor adevărate.* Ca formule logice primitive vom introduce următoarele patru:

(a) $X \vee X \to X$.

(b) $X \to X \vee Y$.

(c) $X \vee Y \to Y \vee X$.

(d) $(X \to Y) \to [Z \vee X \to Z \vee Y]$.

Prima axiomă înseamnă că o propoziţie este adevărată dacă disjuncţia propoziţiei cu ea însăşi este adevărată. Axioma a doua nu este nimic altceva decât Regula b2), meţionată în §4, cea de-a treia postulează comutativitatea disjuncţiei iar cea de-a patra spune că într-o

implicaţie adevărată $X \to Y$ ambele laturi pot fi conectate disjunctiv cu o propoziţie Z arbitrară.

De altfel, simbolul $\to$ îl vom utiliza doar ca abreviere. $X \to Y$ trebuie să fie doar o notaţie mai convenabilă pentru $\overline{X} \vee Y$. Scrisă fără abrevieri, Axioma a), de exemplu, înseamnă aşadar $\overline{X \vee X} \vee X$.

Pentru obţinerea de noi formule din formulele iniţiale luate ca bază, respectiv din formulele deja derivate, avem următoarele două reguli:

α) Regula Substituţiei

Pentru o variabilă propoziţională (i.e., pentru o majusculă latină) poate fi substituită, peste tot unde apare, una şi aceeaşi combinaţie propoziţională.

β) Regula Detaşării

Din două formule $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ se obţine o nouă formulă $\mathfrak{B}$.

În paragraful următor vom clarifica în detaliu operarea cu cele două reguli în vederea obţinerii de noi formule din cele deja derivate, respectiv din axiome.* Deocamdată să mai facem câteva remarci cu caracter general despre axiomatica calculului propoziţional.

În elaborarea sistemului axiomatic am utilizat doar conectorii $\vee$ şi $^{-}$. Acest lucru corespunde faptului mai sus menţionat că aceşti doi conectori sunt suficienţi pentru redarea tuturor combinaţiilor propoziţionale. Din comoditate, utilizăm fireşte şi simbolurile $\to$, &, $\sim$. Însă formulele în care aceste simboluri sunt utilizate trebuie înţelese doar ca abrevieri pentru formulele care conţin doar simbolurile $\vee$ şi $^{-}$. O formulă $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ trebuie astfel văzută ca o abreviere pentru $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ ca o abreviere pentru $\overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}}$ iar $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ ca o abreviere pentru $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$, i.e., $\overline{\overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}} \vee (\overline{\overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{A}})}$ [comp. echivalenţele (21), (28), (24) în §2].

Sistemul axiomatic utilizat de noi este, în esenţă, cel dat de Whitehead şi Russell (în prima ediţie a *Principiei Mathematica*). Axioma

*Toate aceste formule le vom numi *teoreme.*

suplimentară, utilizată de cei doi autori,

$$X \vee (Y \vee Z) \to Y \vee (X \vee Z),$$

care exprimă asociativitatea conectorului $\vee$, s-a dovedit ulterior ca fiind dispensabilă.[5]

Întrucât conectorii & şi $^{-}$, la fel ca $\to$ şi $^{-}$, sunt de asemenea suficienţi pentru redarea tuturor combinaţiilor propoziţionale, ca bază se pot lua axiome în care apar doar & şi $^{-}$ sau doar $\to$ şi $^{-}$. De un interes special s-au bucurat în ultimii ani sistemele axiomatice de ultimul gen, care iau aşadar ca bază doar *implicaţia* şi *negaţia.* Primul dintre aceste sisteme axiomatice, în care, de altfel, ca reguli de deducţie sunt utilizate de asemenea Regulile noastre α) şi β), provine deja de la Frege.[6] El constă în următoarele şase axiome:

1. $X \to (Y \to X)$,
2. $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$,
3. $(X \to (Y \to Z)) \to (Y \to (X \to Z))$,
4. $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$,
5. $\overline{\overline{X}} \to X$,
6. $X \to \overline{\overline{X}}$.

Aşa cum a arătat J. Lukasiewicz, acest sistem axiomatic al lui Frege se poate înlocui cu următorul sistem mai simplu, care constă doar din trei axiome:

1. $X \to (Y \to X)$,
2. $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$,
3. $(\overline{X} \to \overline{Y}) \to (Y \to X)$.

Este chiar posibil să se pună la bază doar o singură formulă iniţială, construită cu implicaţie şi negaţie.[7]

[5]P. Bernays, *Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia Mathematica*, Math. Z. Vol. 25(1926).

[6]G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle 1879.

[7]J. Lukasiewicz and A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül* (C.R. Soc. Sci. Varsovie, Vol. 23, Klasse III, Warsaw 1930).

J. Nicod[8] a elaborat pentru prima dată un sistem axiomatic de calcul propoziţional, sistem care foloseşte doar *conectorul-bară al lui Sheffer* X/Y, menţionat mai sus. Acest sistem utilizează ca singură formulă iniţială (primitivă)

$$[X/(Y/Z)]/\{[U/(U/U)]/[(V/Y)/((X/V)/(X/V))]\}.$$

În locul Regulii noastre de inferenţă β) el utilizează regula: Din două formule $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{A}/(\mathfrak{B}/\mathfrak{C})$, se poate obţine, ca nouă formulă, $\mathfrak{C}$.

În anumite situaţii se preferă un sistem axiomatic de calcul propoziţional în care toţi conectorii fundamentali sunt introduşi de la bun început; şi anume atunci când e vorba să se expună cât mai clar posibil rolul care revine fiecăruia din aceşti conectori fundamentali în inferenţa logică. Un sistem axiomatic ales din acest punct de vedere a fost dat de Hilbert şi Bernays.[9]

De fapt, şi în Regulile noastre a1)-a4), b1)-b3) (§3 şi §4) este conţinută o axiomatică a calculului propoziţional. Aici este vorba despre un sistem cu singura formulă primitivă $X \vee \overline{X}$ şi 6 reguli de deducţie de noi formule.

În fine, mai menţionăm, ca un sistem care ocupă un loc special, "Calculul deducţiei naturale" al lui Gentzen,[10] sistem care a reieşit din strădania de a asimila deducţiile formale ale formulelor, mai mult decât până acum, metodei intuitive de demonstraţie, aşa cum este ea uzuală, de exemplu, în matematică. Calculul nu conţine nicio axiomă logică, ci doar figuri de inferenţă, care indică ce consecinţe pot fi trase din asumpţiile date, dar şi figuri care livrează formule în care dependenţa de asumpţii este eliminată.

---

[8]J.G.P. Nicod, *A reduction in the number of the primitive propositions of logic*, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 19(1917). Comp. şi W.V. Quine, *A note on Nicod's postulate*, Mind 41.

[9]D. Hilbert and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I, p. 66.

[10]G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, I and II, Math. Z. Vol. 39(1934). Idei similare au fost dezvoltate independent de Jaskowski: *On the rules of suppositions in formal logic*, Studia Logica No. 1(1934)

11. Exemple de deducţie a teoremelor din axiome

Ne întoarcem acum la sistemul nostru axiomatic, care constă din formulele primitive a)-d) şi din regulile de deducţie α) şi β).

Vom da o serie de exemple de deducţii strict formale de formule din axiome.* Asupra acestui punct vom stărui ceva mai mult, întrucât experienţa arată că respectarea punctului de vedere pur formal începătorului îi creează anumite dificultăţi.

În derivarea formulelor se recomandă ca anumite operaţii, care se repetă foarte frecvent, să fie redate în forma *regulilor derivate.* Printr-o asemenea regulă rezultatul transformării formale la care ne referim este anticipat o dată pentru totdeauna, iar demonstraţia regulii constă în formularea procedurii generale prin care în fiecare caz individual acea transformare trebuie realizată în acord cu regulile primitive.

Regula I. *Dacă $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ este o formulă demonstrabilă, atunci acelaşi lucru este valabil şi pentru $\mathfrak{A}$.*

Demonstraţia rezultă imediat din Axioma a). Prin substituţie în a) se obţine:

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}.$$

Apoi, întrucât $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ este demonstrabilă, Regula detaşării ne livrează formula $\mathfrak{A}$.

Regula II. *Dacă $\mathfrak{A}$ este o formulă demonstrabilă iar $\mathfrak{B}$ orice altă formulă, atunci şi $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ este o formulă demonstrabilă.*

Această regulă rezultă din Axioma b) în acelaşi mod în care Regula I rezultă din a).

Similar, Axiomelor c) şi d) le corespund Regulile III şi IV; mai general, fiecărei formule care exprimă o relaţie de implicaţie îi aparţine o regulă corespunzătoare.

Regula III. *Dacă $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ este o formulă demonstrabilă, atunci acelaşi lucru este valabil şi pentru $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.*

** *Stricto sensu*, aceste ”deducţii strict formale de formule din axiome” sunt *demonstraţii de teoreme.* În traducere vom păstra însă terminologia originală, i.e., ”formulă demonstrabilă” şi ”teoremă” sunt expresii sinonime.

Regula IV. *Dacă* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *este o formulă demonstrabilă iar* $\mathfrak{C}$ *orice altă formulă, atunci şi* $\mathfrak{C}\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}\mathfrak{B}$ *este o formulă demonstrabilă.*

Teorema 1.

$$(X \to Y) \to [(Z \to X) \to (Z \to Y)].$$

Demonstraţie. $(X \to Y) \to (\overline{Z}X \to \overline{Z}Y)$ rezultă din Axioma d) prin substituţia lui $\overline{Z}$ pentru Z. Aceasta este însă deja Teorema 1, dacă abrevierea $\to$ o înlocuim cu semnificaţia sa.

Regula V. *Dacă* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *şi* $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ *sunt formule demonstrabile, atunci şi* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ *este o formulă demonstrabilă.*

Această regulă corespunde Teoremei 1. Ea se demonstrează dacă în Teorema 1 se substituie $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}$ pentru, respectiv, X, Y, Z iar apoi se aplică Regula detaşării de două ori.

Teorema 2. $\overline{X} \vee X$.

Demonstraţie.

$X \to (X \vee X)$ [prin substituţia lui X pentru Y în b)],
$X \vee X \to X$ [prin a)],
$X \to X$ [prin Regula V].

Ultima formulă este o notaţie prescurtată pentru $\overline{X} \vee X$.

Teorema 3. $X \vee \overline{X}$.

Această teoremă rezultă din Teorema 2 prin aplicarea Regulii III.

Teorema 4. $X \to \overline{\overline{X}}$.

Demonstraţie. Teorema 4 este o abreviere pentru $\overline{X}\ \overline{\overline{X}}$, iar această formulă rezultă din Teorema 3 dacă se substituie $\overline{X}$ pentru X.

Teorema 5. $\overline{\overline{X}} \to X$.

Demonstraţie.

$\overline{X} \to \overline{\overline{\overline{X}}}$ [prin substituţie în Teorema 4],
$X\overline{X} \to X\overline{\overline{\overline{X}}}$ [prin Regula IV],
$X\overline{\overline{\overline{X}}}$ [prin Teorema 3 şi Regula β],
$\overline{\overline{\overline{X}}}X$ [prin Regula III].

Ultima formulă este Teorema 5.

Teorema 6. $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$.

Demonstraţie. $Y \to \overline{\overline{Y}}$ [Teorema 4],
$\overline{X}Y \to \overline{X}\,\overline{\overline{Y}}$ [Regula IV],
$\overline{X}\,\overline{\overline{Y}} \to \overline{\overline{Y}}\,\overline{X}$ [Substituţie în c)],
$\overline{X}Y \to \overline{\overline{Y}}\,\overline{X}$ [Regula V].

Aceasta este teorema căutată.

Regula VI. *Dacă o expresie* $\mathfrak{A}$ *apare ca parte componentă a unei combinaţii propoziţionale, combinaţie care în acest context va fi denotată cu* $\Phi(\mathfrak{A})$*, iar* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *şi* $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ *sunt formule demonstrabile, atunci şi* $\Phi(\mathfrak{A}) \to \Phi(\mathfrak{B})$ *şi* $\Phi(\mathfrak{B}) \to \Phi(\mathfrak{A})$ *sunt formule demonstrabile.* De altfel, prin forma lui $\mathfrak{A}$ şi prin întreaga expresie încă nu este definit în mod unic ce anume trebuie să însemne $\Phi(\mathfrak{A})$. Expresia $X \to XY$, de exemplu, poate fi denotată ca fiind $\Phi(X)$ în trei sensuri distincte, întrucât pentru $\Phi(\mathfrak{A})$ poate fi luată fiecare dintre cele trei expresii $\mathfrak{A} \to XY$, $X \to \mathfrak{A}Y$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}Y$. Regula VI are loc pentru fiecare din definiţiile posibile ale $\Phi(\mathfrak{A})$.

Această regulă poate fi formulată şi astfel: *Două expresii care se află în relaţie de implicaţie reciprocă pot fi substituite una cu cealaltă într-o formulă demonstrabilă.*

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm regula pentru cazul în care $\mathfrak{A}$ apare doar o dată în $\Phi(\mathfrak{A})$ şi că $\Phi(\mathfrak{A})$ are una din următoarele forme $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$. Regula generală se poate obţine prin aplicaţii multiple ale acestei reguli simple dacă Φ se construieşte ”dinăuntru în afară”. Căci pentru fiecare expresie parţială Φ' a lui Φ se obţin, succesiv

$$\Phi'(\mathfrak{B}) \to \Phi'(\mathfrak{A}) \text{ şi } \Phi'(\mathfrak{A}) \to \Phi'(\mathfrak{B}).$$

Fie, aşadar, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ şi $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ deja demonstrate. Atunci vom demonstra

α) $\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}}$ şi $\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}}$.

Ambele aceste formule se obţin dacă mai întâi, prin substituţie în Teorema 6, se demonstrează

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}}),$$

$$(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}}),$$

iar apoi se foloseşte faptul că $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ şi $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ sunt deja demonstrate.

β) $\mathfrak{CA} \to \mathfrak{CB}$; $\mathfrak{CB} \to \mathfrak{CA}$.

Ambele formule se obţin din $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, respectiv $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, prin aplicarea Regulii IV.

γ) $\mathfrak{AC} \to \mathfrak{BC}$; $\mathfrak{BC} \to \mathfrak{AC}$.

Acest caz se reduce la β) dacă se aplică repetat Axioma c) şi Regula V.

Ca aplicaţie a Regulii VI şi a Axiomei c) se obţine *comutativitatea disjuncţiei*. Întrucât prin substituţie în c) se obţin

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \text{ şi } \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},$$

şi deci în orice combinaţie propoziţională, pentru o disjuncţie $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ poate fi întotdeauna substituită $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.

Similar, din Teoremele 4 şi 5 şi Regula VI rezultă că $\mathfrak{A}$ poate fi înlocuită cu $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$, şi invers.

Teorema 7. $\overline{X \& Y} \to \overline{X} \vee \overline{Y}$.

Demonstraţie. $X \& Y$ este o abreviere pentru $\overline{\overline{X}\ \overline{Y}}$. Formula $\overline{\overline{\overline{X}\ \overline{Y}}} \to \overline{X}\ \overline{Y}$ rezultă prin substituţie din $\overline{\overline{X}} \to X$.

Similar, din $X \to \overline{\overline{X}}$ se obţin următoarele teoreme:

Teorema 8. $\overline{X} \vee \overline{Y} \to \overline{X \& Y}$.

Teorema 9. $\overline{X \vee Y} \to \overline{X} \& \overline{Y}$.

Teorema 10. $\overline{X} \& \overline{Y} \to \overline{X \vee Y}$.

Demonstraţie. Fără abrevieri, cele două teoreme, 9 şi 10, se scriu

$$\overline{X \vee Y} \to \overline{\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}}} \text{ şi } \overline{\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}}} \to \overline{X \vee Y}.$$

Ele rezultă din $\overline{X \vee Y} \to \overline{X \vee Y}$, dacă în acord cu Regula VI, în partea dreaptă, respectiv în partea stângă, X este înlocuit cu $\overline{\overline{X}}$ iar Y cu $\overline{\overline{Y}}$.

Teoremele 7, 8 şi 9, 10, corelate cu Regula VI, ne dau Regula de mai înainte a3) (§3).

O altă aplicaţie a Regulii VI este următoarea: Întrucât prin Axioma a) $X \vee X \to X$ are loc iar din Axioma b), prin substituţie, se obţine

$X \to X \vee X$, rezultă că o expresie de forma $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ poate fi întotdeauna înlocuită cu $\mathfrak{A}$, şi invers.

Teorema 11. $X \& Y \to Y \& X$.

Demonstraţie. $\overline{\overline{X}\ \overline{Y}} \to \overline{\overline{Y}\ \overline{X}}$ rezultă din $\overline{\overline{X}\ \overline{Y}} \to \overline{\overline{X}\ \overline{Y}}$, prin aplicarea legii comutativităţii conectorului disjuncţie.

Teorema 12. $X \& Y \to X$.

Demonstraţie. $\overline{X} \to \overline{X}\ \overline{Y}$ [prin Axioma b)]

$\overline{\overline{X}\ \overline{Y}} \to \overline{\overline{X}}$ [prin Teorema 6]

$X \& Y \to \overline{\overline{X}}$

$X \& Y \to X$.

Teorema 13. $X \& Y \to Y$.

Demonstraţia rezultă din Teoremele 11 şi 12.

Teorema 14. $X(YZ) \to Y(XZ)$.

Demonstraţie.

$Z \to XZ$ [din Axioma b) prin permutarea membrilor disjuncţiei],

$YZ \to Y(XZ)$ [Regula IV],

$X(YZ) \to X(Y(XZ))$ [Regula IV],

$X(YZ) \to (Y(XZ))X^{*}$ [comutativitatea disjuncţiei]

$X \to ZX$ [din Axioma b) prin permutarea membrilor disjuncţiei],

$XZ \to Y(XZ)$ [substituţie în formula precedentă],

$X \to Y(XZ)$ [Regula V],

$(Y(XZ))X \to (Y(XZ))(Y(XZ))$ [Regula IV],

$(Y(XZ))X \to Y(XZ)^{**}$ [înlocuirea lui $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ cu $\mathfrak{A}$].

În acord cu Regula V, * şi ** dau

$$X(YZ) \to Y(XZ).$$

Teorema 15. $X(YZ) \to (XY)Z$.

Demonstraţie. $X(YZ) \to X(ZY)$ [legea comutativităţii],

$X(ZY) \to Z(XY)$ [Teorema 14],

$X(YZ) \to Z(XY)$ [Regula V].

Teorema 15 rezultă din aceasta prin aplicarea legii comutativităţii.

Teorema 16. $(XY)Z \to X(YZ)$.

Demonstraţie. $Z(YX) \to (ZY)X$ [substituţie în Teorema 15].

Prin aplicarea legii comutativităţii, $Z(YX)$ poate fi înlocuită cu $(XY)Z$, iar $(ZY)X$ cu $X(YZ)$. Din Teoremele 15 şi 16 şi Regula VI rezultă că nu doar ordinea disjuncţilor ci şi punerea lor în paranteze este indiferentă. Am derivat astfel şi o *lege a asociativităţii* pentru conectorul disjuncţie.

Teorema 17. $X\&(Y\&Z) \to (X\&Y)\&Z$,
$(X\&Y)\&Z \to X\&(Y\&Z)$.

Demonstraţie. $X\&(Y\&Z)$ este o abreviere pentru $\overline{\overline{X}\;\overline{\overline{\overline{\overline{Y}\;\overline{Z}}}}}$, $(X\&Y)\&Z$ este o abreviere pentru $\overline{\overline{\overline{\overline{X}\;\overline{Y}}}\;\overline{Z}}$. Însă aceste două expresii, în acord cu regulile noastre precedente, sunt echivalente şi deci pot fi substituite una pentru cealaltă în mod arbitrar.

Teorema 18. $X \to (Y \to X\&Y)$.

Demonstraţie. $(\overline{X}\;\overline{Y})\overline{\overline{X}\;\overline{Y}}$ [substituţie în Teorema 3].
$\overline{X}(\overline{Y}\;\overline{\overline{X}\;\overline{Y}})$ se obţine din această formulă printr-o altă punere în paranteză a membrilor disjuncţiei. Aceasta este teorema căutată.

Regula VII. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$ *poate fi înlocuită cu* $\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})$ *şi* $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}) \to \mathfrak{C}$.

Demonstraţia rezultă imediat din regulile precedente, dacă abrevierile $\to$ şi & sunt înlocuite cu semnificaţia lor.

Regula VIII. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ *poate fi înlocuită cu* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Demonstraţie. $\overline{\mathfrak{A}}(\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B})$ poate fi înlocuită cu $(\overline{\mathfrak{A}}\;\overline{\mathfrak{A}})\mathfrak{B}$ sau cu $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$.

Teorema 19. $X(Y\&Z) \to XY\&XZ$.

Demonstraţie. $Y\&Z \to Y$ [Teorema 12]
$X(Y\&Z) \to XY$ [prin Regula IV].

Similar, din Teorema 13 se obţine:

$X(Y\&Z) \to XZ$,
$XY \to (XZ \to XY\&XZ)$ [Teorema 18],
$X(Y\&Z) \to (XZ \to XY\&XZ)$ [prin Regula V],
$XZ \to (X(Y\&Z) \to XY\&XZ)$ [prin Regula VII],
$X(Y\&Z) \to (X(Y\&Z) \to XY\&XZ)$ [prin Regula V],

$X(Y\&Z) \to XY\&XZ$ [Regula VIII].

Teorema 20. $XY\&XZ \to X(Y\&Z)$.

Demonstraţie. $Y \to (Z \to Y\&Z)$ [Teorema 18],
$(Z \to Y\&Z) \to (XZ \to X(Y\&Z))$ [Axioma d)],
$Y \to (XZ \to X(Y\&Z))$ [Regula V],
$XZ \to (Y \to X(Y\&Z))$ [Regula VII],
$(Y \to X(Y\&Z)) \to [XY \to X(X(Y\&Z))]$ [substituţie în Axioma d)],
$XZ \to [XY \to X(X(Y\&Z))]$ [Regula V],
$X(X(Y\&Z))$ poate fi înlocuită cu $(XX)(Y\&Z)$, iar mai apoi cu $X(Y\&Z)$. Şi deci

$$XZ \to (XY \to X(Y\&Z)).$$

Teorema 20 rezultă din această ultimă formulă prin Regula VII.

Din Teoremele 19 şi 20, împreună cu Regula VI, se obţine derivarea legii distributivităţii.

Demonstraţia altor teoreme şi reguli se arată a fi nenecesară. Căci am văzut că Regulile a1)-a4), b1)-b3), pe care le-am expus anterior, pot fi obţinute din axiome ca reguli derivate. Rezultă aşadar că toate observaţiile pe care anterior le-am făcut cu referire la aceste reguli, de exemplu, cele care se refereau la principiul dualităţii şi la formele normale, se pot recâştiga şi axiomatic. Aşadar, pentru a arăta demonstrabilitatea unei formule nu trebuie să ne întoarcem de fiecare dată până la axiome. Căci o formulă propoziţională este demonstrabilă din axiome dacă şi numai dacă în forma ei normală conjunctivă fiecare disjuncţie conţine doi membri, din care unul este opusul celuilalt.

12. Consistenţa sistemului de axiome

Elaborarea axiomatică a calculului propoziţional ne-a dat posibilitatea să aplicăm calculului propoziţional problematizările şi consideraţiile care sunt specifice metodei axiomatice. Cele mai importante dintre întrebările care se ridică sunt cele privitoare la *consistenţa, independenţa*

şi *completitudinea* sistemului axiomatic. Mai întâi vom considera consistenţa axiomelor.

Întrebarea despre consistenţă poate fi pusă aici într-o formă adecvată. Axiomele le vom numi consistente dacă este imposibil să se demonstreze, cu ajutorul calculului, două combinaţii propoziţionale care sunt reciproc contradictorii; care, aşadar, rezultă din perechea de propoziţii X, $\overline{X}$ dacă X se înlocuieşte în ambele cazuri în acelaşi mod.

Definiţia dată consistenţei necesită o clarificare. S-ar părea că aici un anumit principiu logic, principiul noncontradicţiei, capătă preeminenţă în raport cu alte principii. De fapt lucrurile stau însă în aşa fel încât apariţia unei contradicţii formale, i.e., demonstrabilitatea a două formule $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, ar condamna întregul calcul ca fiind lipsit de sens; căci am văzut deja mai înainte că dacă două propoziţii de forma $\mathfrak{A}$ şi $\overline{\mathfrak{A}}$ sunt demonstrabile, acest lucru ar fi valabil despre orice altă propoziţie. Consistenţa calculului, în sensul definiţiei de mai sus, este aşadar echivalentă cu faptul că nu orice formulă arbitrară este demonstrabilă.

Pentru a demonstra consistenţa calculului vom proceda în felul următor.

Simbolurile propoziţionale $X, Y, Z, \ldots$ le vom interpreta ca variabile aritmetice, pentru care vom lua în considerare doar valorile 0 şi 1. $X \vee Y$ o vom interpreta ca produsul aritmetic iar $\overline{X}$ o vom defini astfel încât $\overline{0}$ este egal cu 1 şi $\overline{1}$ este egal cu 0. Pe baza acestei interpretări orice combinaţie propoziţională reprezintă o funcţie aritmetică de propoziţiile elementare, care poate lua doar valorile 0 şi 1. Dacă această funcţie este identic 0, atunci, concis, şi despre o expresie simbolică vom spune că ea este identic 0.

Pe baza interpretării date vom putea acum formula o proprietate comună tuturor acelor formule care se pot deriva din axiomele noastre. Aceasta constă în faptul că pe baza interpretării aritmetice formulele dau valoarea 0, pentru orice sistem de valori pentru variabile, aşadar ele sunt identic 0.

Faptul că această proprietate revine mai întâi Axiomelor a)-d) îl clarificăm în felul următor.

Prin testare vom stabili că $\overline{X} \vee X$ are întotdeauna valoarea 0. De aici rezultă că şi $\overline{X \vee X} \vee X$ [Axioma a)] este întotdeauna egală cu 0, fiindcă întotdeauna $X \vee X$ are aceeaşi valoare ca X. Apoi, $\overline{X}(XY)$ [Axioma b)] are aceeaşi valoare ca $(\overline{X} \vee X)Y$, dată fiind asociativitatea produsului aritmetic. Ea este aşadar întotdeauna 0, fiindcă $0 \vee Y$ este întotdeauna egal cu 0. Întrucât $Y \vee X$ are întotdeauna aceeaşi valoare ca $X \vee Y$, formula $\overline{X \vee Y} \vee (Y \vee X)$, drept caz special al formulei $\overline{X}X$, este întotdeauna egală cu 0. Aşadar, Axioma c) dă întotdeauna valoarea 0. În fine, acelaşi lucru este valabil şi pentru Axioma d), căci pentru $Z = 0$, un factor este 0, iar pentru $Z = 1$, $Z \vee X$ are aceeaşi valoare ca X, $Z \vee Y$ aceeaşi valoare ca Y şi deci întreaga formulă dă aceeaşi valoare ca $\overline{\overline{X}Y}\ \overline{X}Y$, care, din nou, este un caz special al formulei $\overline{X}X$.

Aşadar, formulele celor patru axiome au realmente proprietatea mai sus menţionată. Prin aplicarea celor două reguli avute în vedere pentru derivarea de noi formule, respectiv Regula Substituţiei şi Regula Detaşării, această proprietate se conservă întotdeauna. Căci, cât priveşte prima regulă, este evident că prin substituţia unei expresii în locul unei variabile, domeniul de valori pentru variabile nu poate fi nicidecum extins. Iar dacă din două formule $\mathfrak{A}$ şi $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ derivăm, cu ajutorul celei de-a doua reguli, formula $\mathfrak{B}$, atunci proprietatea de a livra întotdeauna valoarea 0 se transmite de la cele două formule la formula derivată. Căci fiindcă formula $\mathfrak{A}$ dă întotdeauna valoarea 0, $\overline{\mathfrak{A}}$ are întotdeauna valoarea 1, şi deci $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ are aceeaşi valoare ca $\mathfrak{B}$, şi astfel $\mathfrak{B}$, la fel ca $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$, are întotdeauna valoarea 0.

Cu aceasta am văzut că, într-adevăr, cu ajutorul calculului nostru pot fi obţinute doar acele formule care în interpretarea aritmetică dau întotdeauna valoarea 0. Constatând acest lucru, am ajuns la finele demonstraţiei noastre. Căci, evident, două formule care apar din X şi $\overline{X}$ prin faptul că pentru X, în ambele cazuri, se substituie aceeaşi combinaţie propoziţională nu pot avea amândouă proprietatea de a fi întotdeauna

egale cu 0; mai degrabă, dacă una are întotdeauna valoarea 0, atunci cealaltă are întotdeauna valoarea 1.

13. Independenţa şi completitudinea sistemului

Întrebării privitoare la consistenţa sistemului axiomatic, la care am putut da un răspuns afirmativ, i se alătură o altă întrebare: dacă axiomele sunt toate *independente* una de alte sau dacă nu cumva vreuna din aceste axiome este dispensabilă.[11]

Răspunsul este că sistemul axiomatic satisface într-adevăr cerinţa independenţei.

Vom arăta mai întâi că Axioma a) $\overline{X \vee X} \vee X$ nu poate fi derivată din restul axiomelor, de fapt nici chiar atunci când formula $\overline{X} \vee X$ este adăugată ca axiomă, astfel că Axioma a) nu poate fi înlocuită în sistemul axiomatic prin formula mai simplă $\overline{X}X$. Şi pentru celelalte axiome demonstraţia independenţei este executată în sensul mai tare, potrivit căruia axioma respectivă nu poate fi înlocuită prin $\overline{X} \vee X$.

Din nou, demonstraţia se va face cu ajutorul unei interpretări aritmetice. Ca valori pentru variabilele $X, Y, Z, \ldots$ vom lua clasele de resturi 0, 1, 2 modulo 4. Simbolul "$\vee$", din nou, va reprezenta înmulţirea uzuală, iar $\overline{X}$ îl definim prin următoarele stipulaţii: $\overline{0}$ înseamnă 1, $\overline{1}$ înseamnă 0, $\overline{2}$ înseamnă 2.

Se poate verifica acum că $\overline{X} \vee X$ şi Axiomele b), c) şi d), în interpretarea dată variabilelor, dau *întotdeauna* clasa de resturi 0, iar această proprietate se transferă, prin aplicarea celor două reguli, la toate formulele derivate din acestea patru, lucru care se poate constata într-un mod similar demonstraţiei de mai sus a consistenţei. Aşadar, dacă Axioma a) ar fi derivabilă, cu ajutorul regulilor, din b), c), d) şi $\overline{X} \vee X$, atunci

[11] Această întrebare privitoare la independenţa sistemului axiomatic este de asemenea soluţionată în lucrarea lui P. Bernays, citată în §10, *Axiomatische Untersuchung* etc.

$\overline{XX} \vee X$ ar trebui să dea clasa de resturi 0 pentru orice valoare admisibilă a lui X. Însă nu acesta este cazul. Căci dacă pentru X substituim valoarea 2, atunci obţinem:

$$\overline{2 \vee 2} \vee 2 = \overline{0} \vee 2 = 1 \vee 2 = 2,$$

aşadar nu valoarea 0.

Independenţa Axiomei b) $\overline{X} \vee (X \vee Y)$ de restul axiomelor, inclusiv de formula $\overline{X} \vee X$, o arătăm în următorul fel. Fie, din nou, X, Y, Z variabile care pot lua valorile 0, 1, 2, 3. Însă pentru aceste variabile acum conectorul $\vee$ îl vom defini prin:

$$0 \vee 0 = 0 \vee 1 = 0 \vee 2 = 0 \vee 3 = 0; \quad 1 \vee 1 = 1 \vee 2 = 1 \vee 3 = 1;$$

$$2 \vee 2 = 2; \quad 3 \vee 3 = 3; \quad 2 \vee 3 = 2$$

şi prin stipulaţia că legea comutativităţii trebuie să aibă loc. Apoi, prin $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ vom înţelege, respectiv, 1, 0, 3, 2. Atunci, orice valori s-ar alege pentru variabile, Axiomele a), c), d) şi formula $\overline{X} \vee X$ dau întotdeauna valoarea 0 sau 2. Această proprietate se conservă pentru toate formulele care se derivează din a), c), d) şi $\overline{X} \vee X$ cu ajutorul celor două reguli. Dimpotrivă, pentru $X = 2$ şi $Y = 1$, $\overline{X}(XY)$ ia valoarea 1.

Independenţa Axiomei c) $\overline{XY}(YX)$ se arată într-un mod similar. $\overline{0}$ se defineşte prin 1, $\overline{1}$ prin 0, $\overline{2}$ prin 0, $\overline{3}$ prin 2. Fie apoi

$$0 \vee 0 = 0 \vee 1 = 0 \vee 2 = 0 \vee 3 = 1 \vee 0 = 2 \vee 0 = 3 \vee 0 = 0;$$

$$1 \vee 1 = 1; \quad 1 \vee 2 = 2 \vee 1 = 2; \quad 1 \vee 3 = 3 \vee 1 = 3;$$

$$2 \vee 3 = 0; \quad 3 \vee 2 = 3; \quad 2 \vee 2 = 2; \quad 3 \vee 3 = 0.$$

Se poate observa cu uşurinţă că Axiomele a), b), d) şi $\overline{X} \vee X$ dau valoarea 0 prin înlocuirea majusculelor latine cu numerele 0, 1, 2, 3, şi că această proprietate se conservă în derivarea noilor formule. Dimpotrivă, Axioma c) ia valoarea 3, dacă X se înlocuieşte cu 2 iar Y cu 3. Această demonstraţie de independenţă ne livrează ceva mai mult. Ea arată că legea asociativităţii

$$\overline{X(YZ)}((XY)Z)$$

nu poate fi demonstrată fără utilizarea Axiomei c). Căci dacă în această formulă se înlocuieşte X cu 3, Y cu 2 iar Z cu 3, atunci avem

$$\overline{3 \vee (2 \vee 3)} \vee ((3 \vee 2) \vee 3) = \overline{0} \vee 3 = 1 \vee 3 = 3.$$

Aşadar, legea asociativităţii este de asemenea independentă de Axiomele a), b) şi d).

Mai rămâne de arătat că Axioma d) este independentă de restul axiomelor. Acest lucru izbuteşte prin următorul sistem de definiţii:

Fie X, Y, Z variabile care pot lua valorile 0, 1, 2, 3. Fie

$$\overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0, \quad \overline{2} = 3, \quad \overline{3} = 0.$$

$$0 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 0 \vee 2 = 2 \vee 0 = 0 \vee 3 = 3 \vee 0 = 2 \vee 3 = 3 \vee 2 = 0.$$

$$1 \vee 1 = 1, \quad 1 \vee 2 = 2 \vee 1 = 2, \quad 1 \vee 3 = 3 \vee 1 = 3.$$

$$2 \vee 2 = 2, \quad 3 \vee 3 = 3.$$

Atunci Axiomele a), b), c) şi $\overline{X} \vee X$ dau întotdeauna valoarea 0 şi la fel se întâmplă cu toate formulele derivate din ele. Dimpotrivă, Axioma d) ia valoarea 2 pentru $X = 3$, $Y = 1$ şi $Z = 2$.

În acest fel am arătat *independenţa Axiomelor* a)-d). Vom pune acum întrebarea privitoare la *completitudine*. Completitudinea unui sistem axiomatic se poate defini în două moduri Pe de-o parte, prin aceasta se poate înţelege că din sistemul axiomatic se pot obţine toate formulele adevărate ale unui anumit domeniu care este caracterizat intuitiv. Conceptul completitudinii se poate însă înţelege şi într-un sens mai tare, astfel încât un sistem axiomatic este numit complet doar dacă prin adăugarea unei formule nederivabile anterior axiomelor sistemului rezultă întotdeauna o contradicţie.

Completitudinea în primul sens ar însemna aici că din Axiomele a)-d) se pot deriva toate formulele propoziţionale logic adevărate. Aşa cum am văzut deja, această cerinţă este satisfăcută.

Însă şi completitudinea în sensul mai tare are loc. De acest lucru ne putem convinge în modul următor. Fie $\mathfrak{A}$ o formulă arbitrară nedemonstrabilă din axiome. Fie $\mathfrak{B}$ expresia în forma normală conjunctivă care aparţine lui $\mathfrak{A}$. Întrucât $\mathfrak{B}$ nu este o formulă mai demonstrabilă decât $\mathfrak{A}$, printre membrii conjuncţiei lui $\mathfrak{B}$ trebuie să apară o disjuncţie $\mathfrak{C}$ care nu conţine doi membri contradictorii. Dacă în $\mathfrak{C}$ pentru fiecare simbol propoziţional nenegat se substituie X, iar pentru fiecare simbol propoziţional negat $\overline{X}$, atunci se obţine o disjuncţie de forma $X \vee X \vee \ldots \vee X$ care, în acord cu regulile calculului propoziţional, este echivalentă cu X. Acum, dacă $\mathfrak{A}$ ar fi postulată ca formulă adevărată, atunci ar rezulta ca formule adevărate şi $\mathfrak{B}$ şi $\mathfrak{C}$ şi, în fine, X. Atunci şi $\overline{X}$ ar fi putut fi însă substituit pentru X şi am fi obţinut o contradicţie. Sistemul axiomatic considerat se dovedeşte aşadar ca fiind complet.

CAPITOLUL 2

Calculul clasial
(Calculul predicatelor monadice)

Forma de până acum a calculului logic este suficientă pentru redarea precisă a acelor conexiuni logice în care propoziţiile apar ca întregi nedecompozabili. Totuşi, indiscutabil, pentru scopurile logicii în general, calculul propoziţional nu este unul suficient. Nici măcar acele genuri simple de inferenţe care în logica tradiţională sunt denotate în mod uzual cu cuvintele mnemotehnice "barbara", "celarent", "darii" etc. nu se pot reda. De exemplu, în zadar se caută o redare formală a relaţiei logice exprimate în următoarele trei propoziţii:

"Toţi oamenii sunt muritori,
Socrate este un om;
Aşadar, Socrate este muritor."

Motivul îl reprezintă faptul că inferenţele de acest gen nu depind doar de propoziţii ca întregi, ci structura logică internă a propoziţiilor, care gramatical se exprimă prin relaţia dintre subiect şi predicat, este cea care joacă un rol esenţial. Prin aceste consideraţii suntem provocaţi să schimbăm calculul sau, cel puţin, semnificaţia lui intuitivă.

1. Reinterpretarea intuitivă a simbolismului calculului propoziţional

În calculul care urmează vom utiliza aceleaşi simboluri logice ca în calculul propoziţional. Prin $X, Y, Z, \ldots$ nu vom mai înţelege însă propoziţii ca întregi, ci predicate. De exemplu, X poate denota predicatul "este muritor" sau "este divizibil" sau "are o cauză". Utilizarea aici a cuvântului

"predicat" este cea uzuală în filosofie, respectiv cea prin care *un* subiect poate fi caracterizat mai detaliat. De-a lungul acestei lucrări, respectiv în capitolul al treilea şi al patrulea, expresia "predicat" va fi însă utilizată într-un sens mai larg, în care nu trebuie să intrăm mai detaliat aici. Acolo vom avea de-a face cu predicate cu mai mulţi subiecţi. Şi astfel predicatele în sens obişnuit, doar despre care este vorba în acest capitol, le vom numi mai exact predicate monadice; adăugirea "monadic" cel mai adesea o vom omite însă în cele ce urmează.

Dacă X este un predicat arbitrar, de exemplu "este frumos", atunci prin $\overline{X}$ vom înţelege predicatul contrar "nu este frumos". Dacă X şi Y denotă, respectiv, predicatele "este muritor", "este raţional", atunci $X\&Y$ este simbolul pentru predicatul "este muritor şi este raţional", $X \vee Y$ este simbolul pentru "este muritor sau este raţional". Celelalte simboluri logice le putem, din nou, utiliza ca abrevieri.

Considerate în ele însele, predicatele nu sunt nici adevărate, nici false. Aşadar, dacă despre o formulă X, respectiv $X \vee Y$, se afirmă că este adevărată, atunci acest lucru trebuie să aibă un alt sens decât cel de până acum. Prin aceasta acum vom înţelege că predicatul X, respectiv $X \vee Y$, revine *tuturor* obiectelor.

Cu aceasta semnificaţiile tuturor simbolurilor din calculul predicatelor monadice sunt fixate. Toate formulele vor avea sensul *judecăţilor universale.* Pentru a reprezenta judecăţile universale uzuale, ca de exemplu "Toţi oamenii sunt muritori", o astfel de judecată se poate mai întâi aduce în forma: "Toate obiectele nu sunt oameni sau sunt muritoare". Apoi, dacă pentru predicatul "este un om" se introduce simbolul X iar pentru "este muritor" se introduce simbolul Y, atunci rezultă reprezentarea simbolică a judecăţii prin formula $\overline{X} \vee Y$. Corespunzător, o judecată universal negativă, precum "Niciun om nu este perfect" este reprezentată prin formula $\overline{X} \vee \overline{Y}$, unde X, Y denotă, respectiv, predicatele "este un om", "este perfect". Interpretarea exactă a formulei $\overline{X} \vee \overline{Y}$ este următoarea: Toate obiectele nu sunt oameni sau nu sunt perfecte.

Ne interesăm acum, din nou, de formulele logic adevărate, i.e., de acele formule din care prin substituţia de predicate arbitrare pentru variabilele $X, Y, \ldots$ se obţine un predicat care are loc despre toate obiectele. Este aşadar uşor de văzut că *în noua interpretare a calculului sistemul formulelor logic adevărate este exact acelaşi ca în calculul propoziţional.*

Căci, mai întâi, sunt din nou valide echivalenţele a1)-a4), care fac posibilă transformarea expresiilor în forma normală conjunctivă. Apoi, ne putem uşor convinge de faptul că o formulă adusă la forma normală este logic adevărată dacă şi numai dacă orice membru al conjuncţiei conţine o disjuncţie $X \vee \overline{X}$. Aşadar, formalismul calculului propoziţional poate fi păstrat integral; trebuie doar să dăm o altă interpretare formulelor.

Pe lângă interpretarea originală şi interpretarea în sensul calculului predicatelor, pentru formulele calculului propoziţional există şi o a *treia interpretare.* Însă, spre deosebire de calculul predicatelor, aici nu e vorba despre introducerea de noi relaţii, ci doar se dă o interpretare diferită faptelor exprimabile în calculul predicatelor, interpretare care oferă avantaje sub aspectul intuitivităţii. Această schimbare în interpretare constă în aceea că predicarele, în loc să fie definite în raport cu *conţinutul* lor, sunt caracterizate în raport cu *extensia* lor. Fiecărui predicat îi corespunde o anumită clasă[1] de obiecte, clasa constând din toate obiectele pentru care predicatul respectiv are loc. Fireşte, aici nu este exclus cazul în care clasa nu conţine niciun obiect. Clasele trebuie luate acum ca obiecte ale calculului pe care în această interpretare îl vom numi *calculul clasial.*

Prin $\overline{X}$ vom înţelege clasa care constă din toate elementele care nu aparţin clasei X. $X \& Y$ reprezintă intersecţia celor două clase, X şi Y, iar $X \vee Y$ reuniunea lor. $X \to Y$ şi $X \sim Y$, ca mai înainte, pot fi înţelese ca abrevieri pentru $\overline{X} \vee Y$, respectiv $\overline{X} \vee Y \& \overline{Y} \vee X$. Dacă se spune că o formulă X este adevărată, atunci aceasta va însemna că X este clasa care constă din toate elementele. Cu aceste stipulaţii toate regulile calculului predicatelor sunt valabile fără modificări şi pentru calculul clasial.

[1]În matematică în locul expresiei "clasă" se foloseşte, în mod uzual, cuvântul "mulţime".

În această interpretare adevărul formulei $X \to Y$ înseamnă: clasa corespunzătoare lui X este o subclasă a clasei definite prin Y; formula $X \sim Y$ este adevărată dacă şi numai dacă clasele X şi Y sunt identice.

Judecata universală ”Toţi oamenii sunt muritori” poate fi astfel formulată în calculul clasial: ”Clasa reuniune, constituită din clasa non-oamenilor şi cea a muritorilor, cuprinde toate obiectele”.

Ea are aceeaşi reprezentare formală ca în calculul predicatelor.

2. Combinarea calculului clasial cu calculul propoziţional

Inferenţele logicii tradiţionale nu pot fi încă formalizate toate în calculul predicatelor, fiindcă ne lipseşte o reprezentare a *judecăţilor particulare. Această reprezentare este atinsă abia prin conectarea calculului propoziţional cu calculul predicatelor sau calculul clasial.* La această unificare ajungem pe baza consideraţiei că relaţiile calculului predicatelor constituie propoziţii care pot fi subordonate regulilor calculului propoziţional. Această idee conduce la elaborarea unui *calcul combinat*, în care simbolurile logice &, $\vee$ şi $^{-}$ sunt uneori utilizate pentru conectarea propoziţiilor iar uneori pentru conectarea predicatelor.

Atunci ar fi însă discutabil dacă o propoziţie $\overline{X}$ semnifică faptul că predicatul X nu are loc despre niciun lucru sau nu este adevărat că X are loc despre toate lucrurile. Dacă, de exemplu, X denotă predicatul ”a fi frumos”, atunci după una din interpretări $\overline{X}$ s-ar citi ”Toate lucrurile nu sunt frumoase”, iar după cealaltă ”Nu toate lucrurile sunt frumoase”. Această dificultate o putem evita punând predicatele între două bare verticale. Atunci $|X \vee Y|$ ar însemna că predicatul $X \vee Y$ are loc despre toate lucrurile, pe când $|X| \vee |Y|$, dimpotrivă: predicatul X are loc despre toate lucrurile sau predicatul Y are loc despre toate lucrurile. Cele două propoziţii, care tocmai dădeau prilejul unei confuzii, sunt acum deosebite prin $|\overline{X}|$ şi $\overline{|X|}$. Cu ajutorul calculului combinat pot fi acum reprezentate

propoziţiile particulare. De exemplu, propoziţia ”Unele numere sunt impare” poate fi transformată astfel: ”Nu este adevărat că toate numerele sunt pare”. Dacă predicatul ”a fi număr” este denotat cu X iar predicatul ”a fi par” cu Y, atunci mai întâi propoziţia ”Toate numerele sunt pare” se redă simbolic prin $|\overline{X} \vee Y|$. Contradictoria acestei propoziţii este aşadar redată prin $\overline{|\overline{X} \vee Y|}$. În general, $\overline{|\overline{X} \vee Y|}$ denotă propoziţia ”Există lucruri pentru care X şi $\overline{Y}$ au loc simultan”.

În calculul combinat o serie de noi formule logic adevărate se adaugă formulelor precedente. Formule de acest gen sunt, de exemplu:

$$\{|X \to Y| \& |Y \to Z|\} \to |X \to Z|$$

$$|X| \& |Y| \sim |X \& Y|.$$

O expunere sistematică şi o investigaţie a acestor formule nu vor fi date, din motive menţionate la finele paragrafului care urmează.

3. Derivare sistematică a inferenţelor aristotelice tradiţionale

După ce calculului nostru i-am dat completarea necesară, vom trece acum la aplicarea calculului la teoria inferenţelor logice. Aici e vorba de a determina cum se configurează silogismele aristotelice clasice în calculul nostru combinat şi cum se pot ele sistematiza şi întemeia din punctul de vedere al acestui calcul.

Proprietăţile caracteristice ale inferenţelor avute în vedere sunt următoarele: ele constau din trei propoziţii din care cea de-a treia (concluzia) constituie o consecinţă logică a primelor două (a premiselor). Fiecare dintre cele trei propoziţii are una din următoarele patru forme:

”Toţi A sunt B” (judecată universal afirmativă).

”Unii A sunt B” (judecată particular afirmativă).

”Niciun A nu este B” (judecată universal negativă).

”Unii A nu sunt B” (judecată particular negativă).

Drept notaţie prescurtată a acestor patru forme, se obişnuieşte utilizarea vocalelor A, I, E, O (în ordinea indicată). Fie AB simbolul care serveşte ca simbol comun pentru cele patru tipuri de judecăţi.

În cele trei propoziţii apar în total trei termeni, *termenul subiect* (S), *termenul predicat* (P) şi *termenul mediu* (M); respectiv, concluzia are forma SP, iar dintre premise, prima conţine termenii M şi P, iar cea de-a doua M şi S. Aşadar, rezultă următoarele patru figuri silogistice:[2]

$$\frac{\begin{array}{c}MP\\SM\end{array}}{SP}\qquad\frac{\begin{array}{c}PM\\SM\end{array}}{SP}\qquad\frac{\begin{array}{c}MP\\MS\end{array}}{SP}\qquad\frac{\begin{array}{c}PM\\MS\end{array}}{SP}$$

Întrucât pentru fiecare din cele patru figuri silogistice, pentru fiecare din cele trei propoziţii ale inferenţei, potrivit apartenenţei sale la una din cele patru forme A, I, E, O, există patru posibilităţi, rezultă, pur combinatoric, că ar exista 256 de moduri diferite de silogisme. Totuşi, prin cerinţa că propoziţia din concluzie trebuie să rezulte din premise, numărul posibilităţilor se reduce în mod esenţial. Logica aristotelică ne arată că 19 moduri silogistice diferite sunt admisibile. Pentru aceste moduri silogistice s-au introdus cuvinte mnemotehnice trisilabice, în care vocalele, în ordine, indică formele de judecăţi la care aparţin cele trei propoziţii ale silogismului. Cu această terminologie obţinem următorul tabel sinoptic:

Figura 1	*Figura 2*	*Figura 3*	*Figura 4*
BARBARA	CESARE	DATISI	CALEMES
CELARENT	CAMESTRES	FERISO	FRESISON
DARII	FESTINO	DISAMIS	DIMATIS
FERIO	BAROCO	BOCARDO	BAMALIP
		DARAPTI	FESAPO
		FELAPTON	

[2]A se remarca faptul că fixarea ordinii lui S şi P în concluzie nu reprezintă vreo restrângere a generalităţii, deoarece o figură silogistică cu PS drept concluzie rezultă întotdeauna din una din cele patru figuri menţionate prin simpla schimbare a notaţiei şi prin permutarea premiselor.

Acest tabel de silogisme vrem acum să-l testăm prin intermediul calculului predicatelor pentru a determina dacă el conţine realmente toate modurile silogistice avute în vedere şi dacă modurile silogistice enumerate în acest tabel satisfac cerinţa validităţii logice (i.e., dacă concluzia rezultă logic din premise).

Pentru aceasta mai întâi vom reprezenta simbolic cele patru forme A, I, E, O ale unei judecăţi AB. Dacă prin X, Y denotăm predicatele "este A", respectiv "este B", atunci reprezentările simbolice arată astfel:

$$|\overline{X} \vee Y|; \quad |\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}|; \quad |\overline{X} \vee \overline{Y}|; \quad \overline{|\overline{X} \vee Y|}.$$

Din această notaţie rezultă imediat regulile tradiţionale referitoare la formele de judecăţi considerate, cele despre *contradicţie* (*opoziţie*) şi *conversiune*. Respectiv, din cele patru judecăţi ultima este exprimată ca fiind contradictoria primeia, iar cea de-a doua contradictoria celei de-a treia. Apoi, cele două formule din mijloc sunt simetrice cu referire la X şi Y, astfel încât judecata "Unii A sunt B" se arată a fi echivalentă cu "Unii B sunt A" şi, similar, judecata "Niciun A nu este B" este echivalentă cu "Niciun B nu este A". Dimpotrivă, la formele A şi O nu este posibilă o astfel de conversiune.

Acest mod de reprezentare a celor patru forme de judecăţi îl vom aplica acum silogismelor, introducând simbolurile X, Y, Z pentru predicatele "este S", "este M", "este P". Atunci fiecare silogism constă din trei formule. Prima premisă este reprezentată prin una din cele patru forme:

$$|\overline{Y} \vee Z|; \quad |\overline{Y} \vee \overline{Z}|; \quad |\overline{Z} \vee Y|; \quad |\overline{Z} \vee \overline{Y}|,$$

respectiv prin contradictoria ei logică. Corespunzător, în cea de-a doua premisă vom avea una din formele:

$$|\overline{Y} \vee X|; \quad |\overline{Y} \vee \overline{X}|; \quad |\overline{X} \vee Y|; \quad |\overline{X} \vee \overline{Y}|$$

sau contradictoria ei. Drept concluzie vom avea, negată sau nenegată, una din cele două forme:

$$|\overline{X} \vee \overline{Z}|; \quad |\overline{X} \vee Z|.$$

(A se remarca faptul că X, Y şi Z pot să apară nenegate doar ca al doilea termen al unei combinaţii.)

La aceste condiţii formale se adaugă acum şi cerinţa conform căreia cea de-a treia formulă trebuie să fie o consecinţă a primelor două, în sensul că prin substituţia anumitor predicate pentru X, Y, Z primele două formule nu pot fi satisfăcute, fără ca şi cea de-a treia să aibă loc.

Acum e vorba să investigăm modul în care prin această cerinţă varietatea combinaţiilor de formule admisibile este limitată.

Pentru această discuţie este utilă observaţia că fără a schimba ceva în valoarea de adevăr a unei formule, doi termeni conectaţi prin $\vee$ pot fi permutaţi reciproc. Apoi, ordinea premiselor este neesenţială şi dată fiind generalitatea cu care concluzia trebuie să aibă loc, este irelevant dacă un predicat este denotat cu U sau cu $\overline{U}$. Pe baza acestor fapte, fiecare pereche de premise o putem reduce la una din următoarele şase forme normale:

$$\begin{array}{llllll} \text{I.} & |\overline{U} \vee \overline{V}| & \text{III.} & \overline{|\overline{U} \vee \overline{V}|} & \text{V.} & \overline{|\overline{U} \vee \overline{V}|} \\ & |\overline{V} \vee \overline{W}| & & |\overline{V} \vee \overline{W}| & & \overline{|\overline{V} \vee \overline{W}|} \\ \text{II.} & |\overline{U} \vee \overline{V}| & \text{IV.} & \overline{|\overline{U} \vee \overline{V}|} & \text{VI.} & \overline{|\overline{U} \vee \overline{V}|} \\ & |V \vee \overline{W}| & & |V \vee \overline{W}| & & \overline{|V \vee \overline{W}|} \end{array}$$

Concluzia ia una dintre formele (negate sau nenegate):

$$|\overline{U} \vee \overline{W}|; \quad |\overline{U} \vee W|; \quad |U \vee \overline{W}|; \quad |U \vee W|.$$

De la noua notaţie ne putem întoarce la cea anterioară substituind pentru V fie Y, fie $\overline{Y}$, apoi egalând U, W sau W, U cu una din perechile X, Z; $X, \overline{Z}$; $\overline{X}, Z$; $\overline{X}, \overline{Z}$ iar apoi considerând toate permutărule posibile de disjuncţi care (cu o convenabilă ordine a premiselor) conduc la una dintre triadele formal admisibile de formule.

Acum, dacă testăm fiecare din cele şase perechi de premise I-VI pentru a vedea ce anume se poate conchide din ele, vom descoperi mai întâi că din I, IV şi V nu rezultă nicio concluzie de genul cerut.

Respectiv, I este satisfăcută pentru U, W arbitrare, dacă predicatul V nu revine niciunui lucru. IV este satisfăcută în cazul în care V revine tuturor lucrurilor, doar dacă U revine cel puţin unui lucru, iar V este satisfăcută pentru U şi W arbitrare care revin cel puţin unui lucru în cazul în care V revine tuturor lucrurilor.

Nici premisele din VI nu livrează vreuna din concluziile avute în vedere. Deoarece pentru ca ele să fie satisfăcute pentru o alegere convenabilă a lui V, este suficient ca U şi W să revină fiecare unui lucru. Totuşi, condiţiile menţionate sunt compatibile cu falsitatea fiecăreia dintre concluziile aflate în discuţie.

Aşadar, doar cazurile II şi III intră în discuţie pentru inferenţele noastre. Dacă se introduce abrevierea $\rightarrow$ şi prima din formulele din §2, cele două premise din II, $|\overline{U} \vee \overline{V}|$ şi $|V \vee \overline{W}|$, livrează imediat relaţia $|\overline{U} \vee \overline{W}|$. Apoi, $|\overline{U} \vee \overline{W}|$ este concluzia cea mai tare care poate fi trasă din cele două premise, întrucât dacă această relaţie are loc, cele două premise sunt satisfăcute în cazul în care se pune V egal cu W.

În III, prima premisă, $\overline{|\overline{U} \vee \overline{V}|}$, înseamnă că există lucruri (i.e., cel puţin un lucru) căruia-i revin simultan U şi V. Cea de-a doua premisă $|\overline{V} \vee \overline{W}|$, înseamnă că orice lucru care are proprietatea V are şi proprietatea $\overline{W}$. De aici rezultă că există lucruri cărora le revin simultan U şi $\overline{W}$, sau că $\overline{|\overline{U} \vee W|}$ este o formulă adevărată.

Dacă, invers, formula $\overline{|\overline{U}W|}$ este adevărată, atunci premisele din III sunt satisfăcute dacă se pune $\overline{V}$ egal cu W.

Şi astfel, rezultă că silogismele considerate de noi se pot reduce la două forme principale, respectiv:

$$\text{(A)}\quad \frac{\begin{array}{c}|\overline{U} \vee \overline{V}| \\ |V \vee \overline{W}|\end{array}}{|\overline{U} \vee \overline{W}|} \qquad\qquad \text{(B)}\quad \frac{\begin{array}{c}\overline{|\overline{U} \vee \overline{V}|} \\ |\overline{V} \vee \overline{W}|\end{array}}{\overline{|\overline{U} \vee W|}}$$

Prin intermediul diferitelor transformări admisibile, de la aceste două forme principale vrem acum să trecem din nou la reprezentările anterioare, pe baza cărora să putem deosebi diferitele feluri de silogisme aristotelice. Pentru aceasta va trebui să avem în vedere restricţiile formale impuse silogismelor, potrivit cărora predicatele nenegate X, Y, Z pot să apară într-un produs (disjuncţie) doar ca al doilea factor iar Y nu poate să apară niciodată în concluzie. Mai mult, trebuie să avem în vedere faptul că permutarea lui U şi W în forma principală (A) nu livrează tipuri noi de silogisme.

Corespunzător, toate silogismele care rezultă din forma principală (A) le vom obţine prin următoarele substituţii:

$$\begin{array}{lll} U = X, & V = Y, & W = Z; \\ U = X, & V = \overline{Y}, & W = Z; \\ U = X; & V = \overline{Y}, & W = \overline{Z}. \end{array}$$

Dintre acestea (printr-o ordine convenabil aleasă a premiselor şi a factorilor), prima dă silogismele CAMESTRES şi CALEMES, cea de-a doua CELARENT şi CESARE iar cea de-a treia BARBARA.

Pentru forma principală (B), diferitele tipuri de silogisme le vom obţine din substituţiile:

$$\begin{array}{llllll} U = X, & V = Y, & W = Z; & U = X, & V = Y, & W = \overline{Z}; \\ U = X, & V = \overline{Y}, & W = Z; & U = Z, & V = Y, & W = \overline{X}; \\ U = \overline{Z}, & V = Y, & W = \overline{X}. & & & \end{array}$$

Prima substituţie dă silogismele FERIO, FESTINO, FERISO, FRESISON, cea de-a doua DARII şi DATISI, cea de-a treia BAROCO, cea de-a patra DISAMIS şi DIMATIS iar cea de-a cincea BOCARDO.

Reflecţile de mai sus ne arată că există 15 forme diferite de silogisme de genul cerut. Toate acestea aparţin silogismelor aristotelice, aşa că tabelul clasic al silogismelor epuizează toate cazurile posibile. Şi totuşi, prin metoda noastră n-am regăsit toate tipurile aristotelice de silogisme. Mai degrabă, din tabelul tocmai obţinut lipsesc patru silogisme: DARAPTI, BAMALIP, FELAPTON şi FESAPO. Această discrepanţă

provine din faptul că semnificaţia devenită tradiţională începând cu Aristotel a propoziţiilor universal afirmative (”Toţi A sunt B”) nu este în perfect acord cu interpretarea noastră a formulei $|\overline{X} \vee Y|$. Respectiv, după Aristotel, o propoziţie ”Toţi A sunt B” doar atunci contează ca propoziţie adevărată când există obiecte care sunt A. Din acest punct de vedere devierea noastră de la Aristotel este justificată prin considerarea aplicaţiilor matematice ale logicii, în raport cu care interpretarea proprie concepţiei aristotelice s-ar dovedi inadecvată.

Cu aceasta am încheiat consideraţiile despre calculul predicatelor şi calculul clasial. Este adevărat, se pot formula un număr de probleme interesante; e.g., ne putem întreba care formule ale calculului combinat reprezintă propoziţii logic adevărate. Vom renunţa însă la o examinare mai detaliată a acestor probleme, întrucât acestea sunt formulate şi tratate într-un context mai general în următorul capitol. De exemplu, la întrebarea despre formulele logic adevărate ale calculului combinat se răspunde în mod complet prin expunerile din §12 al capitolului următor. Vom renunţa şi la o tratare axiomatică a calculului predicatelor monadice.[3] Calculul clasial sau calculul predicatelor monadice constituie doar o parte pregătitoare pentru calculul predicatelor în sens mai larg, care va fi tratat în capitolul următor, şi prin a cărui introducere calculul monadic devine astfel inutil; şi astfel, în cele ce urmează, nu mai trebuie să revenim la consideraţiile tratate în acest capitol. Dimpotrivă, calculul propoziţional rămâne baza indispensabilă a investigaţiilor care urmează.

[3]Un sistem axiomatic complet pentru calculul combinat şi totodată o extensie interesantă a calculului clasial a fost propusă de M. Wajsberg, comp. M. Wajsberg: *Ein erweiterter Klassenkalkül*, Mh. Math. Physik. Vol. 40(1932) [a se vedea şi corectarea aferentă, în Mh. Math. Physik, vol. 42(1935), p. 242]. Întrebarea de asemenea tratată în acea lucrare, despre propoziţiile logic adevărate ale calculului combinat, a fost deja soluţionată în alt mod, prin lucrările menţionate în §12 al capitolului următor, de către Löwenheim, Skolem şi Behmann. Comp. în special expunerea lui Behmann în *Math. Anal.*, Vol. 86(1922).

CAPITOLUL 3

Calculul restrâns al predicatelor

1. Inadecvarea calculului precedent

Calculul combinat a făcut posibilă o tratare mai sistematică a problemelor logice decât logica intuitivă tradiţională. Pe de altă parte, se poate însă spune că în raport cu posibilitatea de a deriva concluzii logice amândouă calculele se comportă în mod esenţial la fel. Inferenţele mai complicate care sunt posibile în calculul clasial se pot obţine şi prin aplicarea repetată a silogismelor aristotelice.

După opinia logicienilor de mai demult, pe care şi Kant o împărtăşea, odată cu teoria aristotelică a silogismului logica în general era exhautivată. Kant spune:[1]

"Remarcabil la ea [la logică] este şi faptul că şi până astăzi [de la Aristotel] nu a putut face niciun pas înainte şi că, astfel, după toate aparenţele, pare să fie închisă şi completă."

În realitate lucrurile stau astfel încât deja în contexte logice foarte simple formalismul aristotelic se dovedeşte a fi inadecvat. În particular, el este principial insuficient în vederea tratării fundamentelor logice ale matematicii. Respectiv, el dă rateuri pretutindeni unde e vorba să reprezinte simbolic o *relaţie dintre mai multe obiecte.*

Să clarificăm acest lucru printr-un exemplu simplu. Fie următoarea aserţiune: "Dacă B se află între A şi C, atunci B se află de asemenea între C şi A." De fapt, această aserţiune o putem scrie în calculul uzual al propoziţiilor în forma $X \rightarrow Y$; iar această formă aserţiunea şi-o păstrează şi în calculul monadic al predicatelor. În acest din urmă calcul ea se poate formula în următorul fel: "Dacă un triplet ordonat de

[1] În prefaţă la ediţia a doua la *Critica raţiunii pure.*

puncte are proprietatea că al doilea punct se află între primul şi al treilea, atunci el posedă şi proprietatea că al doilea punct se află între al treilea şi primul.” Totuşi, prin această formulare nu este nicidecum exprimată esenţa logică a aserţiunii, şi anume simetria relaţiei ”între” cu referire la A şi C şi deci această formulare nu poate fi folosită nici pentru a deriva consecinţele matematice ale aserţiunii considerate. Sub acest aspect nimic nu se schimbă dacă vom folosi formularea calculului combinat.

Pentru clarificarea acestor stări de lucruri să mai luăm un exemplu care, de altfel, nu aparţine matematicii. Aserţiunea ”Dacă există un fiu, atunci există un tată” este, desigur, una logic evidentă, iar de la un calcul logic suficient de elaborat putem pretinde s-o expună în mod clar, în sensul că această conexiune asertată, prin intermediul reprezentării simbolice, devine sesizabilă ca fiind o consecinţă a unor principii logice simple. Însă cu ajutorul calculului precedent, despre acest lucru nu poate fi vorba. Desigur, conexiunea avută în vedere o putem exprima simbolic (prin aplicarea calculului combinat) prin formula: $\overline{|\overline{X}|} \to \overline{|\overline{Y}|}$, unde X şi Y denotă predicatul ”este un fiu”, respectiv ”este un tată”. Însă această formulă nu ne poate nicidecum ajuta în vederea verificării adevărului aserţiunii, deoarece printr-o altă substituţie pentru X şi Y ea poate exprima şi propoziţii false. Formula nu exprimă acel ceva pe care se bazează conexiunea logică dintre antecedent şi consecvent, respectiv, nu exprimă faptul că predicatele ”a fi fiu” şi ”a fi tată” conţin o relaţie a unui obiect cu un alt obiect. O stare de lucruri similară se găseşte în aproape toate judecăţile complicate.

2. Baza metodologică a calculului predicatelor

Întrucât calculul precedent s-a dovedit inadecvat, suntem obligaţi să căutăm un nou gen de simbolism logic. Pentru aceasta ne vom întoarce încă o dată în acel punct al consideraţiilor noastre în care pentru prima dată am trecut dincolo de calculul propoziţional. Acolo pasul decisiv l-a constituit despicarea propoziţiilor în subiect şi predicat. N-am folosit

însă pe deplin această descompunere atunci când în redarea propoziţiilor am simbolizat explicit doar predicatele nu însă şi subiecţii. Motivul acestei limitări a simbolismului stătea în aceea că, privitor la formalism, ne străduiam să ne raliem la calculul propoziţional. Acum, dacă acest punct de vedere al analogiei cu calculul propoziţional îl abandonăm, atunci ni se prezintă ca natural următorul procedeu: în redarea propoziţiei *obiectele* (*indivizii*) se separă de *proprietăţile* (*predicatele*) exprimate despre ele şi ambele se simbolizează în mod explicit.

Acest lucru îl vom face folosind, în redarea simbolică a predicatelor, *simboluri funcţionale cu locuri pentru argumente*[*], unde în locurile pentru argumente trebuie substituite simboluri (nume, denotări) de obiecte. De exemplu, simbolul funcţional $P(\ )$ poate simboliza "este un număr prim". Atunci $P(5)$ este redarea propoziţiei "5 este un număr prim". Dacă $M(\ )$ simbolizează predicatul "a fi om", atunci $M(\text{Caius})$ înseamnă: "Caius este un om". Mai departe, dacă relaţia "de la mai mic la mai mare" este exprimată prin simbolul funcţional diadic $<(\ ,\ )$, atunci $<(2,3)$ este redarea simbolică a propoziţiei "2 este mai mic decât 3". Similar, propoziţia "B se află între A şi C" poate fi redată prin $Z(A,B,C)$.

Toate formulele matematice reprezintă astfel de relaţii între două sau mai multe cantităţi. De exemplu, formulei $x+y=z$ îi corespunde un predicat triadic $S(x,y,z)$. Adevărul lui $S(x,y,z)$ înseamnă că x,y,z sunt conectate prin relaţia $x+y=z$.[2]

La propoziţiile redate în acest nou mod se pot aplica conectorii calculului propoziţional. De exemplu, contradictoria propoziţiei $P(5)$ este exprimată prin $\overline{P(5)}$. Formula

$$(<(2,3)\,\&<(3,7))\rightarrow<(2,7)$$

[*]Dacă n este numărul locurilor pentru argumente, atunci vom spune că simbolul funcţional respectiv este unul *n-adic*, termen pe care-l vom folosi adesea în cele ce urmează.

[2]Până acum uzual în logică era de de a numi "predicate" doar funcţiile cu un loc pentru argument; dimpotrivă, funcţiile cu mai multe locuri pentru argumente erau numite relaţii. Aici cuvântul "predicat" îl vom utiliza într-un sens cu totul general.

redă propoziţia "Dacă 2 este mai mic decât 3 iar 3 este mai mic decât 7, atunci 2 este mai mic decât 7".

Încă ne lipseşte o expresie pentru *universalitatea propoziţiilor*. Pentru a obţine o astfel de expresie, după modelul matematicii vom introduce, pe lângă simbolurile pentru obiecte definite (numele proprii), şi *variabilele* $x, y, z, \ldots$, cu care vom putea de asemenea umple locurile pentru argumente ale simbolurilor funcţionale. O umplere *definită* a unui loc pentru argument desemnează o *valoare a variabilei respective*.

În general valorile unei variabile sunt limitate la genuri definite de obiecte, determinate de semnificaţia simbolului funcţional. De exemplu, relaţia fundamentală din geometria plană elementară, "Punctul x se află pe dreapta y", se exprimă printr-un simbol funcţional cu două argumente $L(x, y)$. Aici ca valori pentru x se iau în consideraţie doar punctele iar pentru y doar dreptele.

Dacă în locurile pentru argumente ale funcţiilor logice se substituie valori definite ale argumentelor (i.e., nume proprii de indivizi), atunci rezultă *propoziţii definite*, care pot fi adevărate sau false. Dacă, dimpotrivă, locurile pentru argumente ale simbolurilor funcţionale sunt umplute cu variabile, atunci prin aceasta nu este reprezentată nicio judecată definită, ci avem doar o expresie simbolică care depinde de variabilele respective. Aşa cum în algebră se scriu formule cu litere, care spun că pentru valori numerice arbitrare, care se substituie în locul variabilelor, ecuaţia numerică rezultantă este adevărată, tot astfel putem proceda şi în calculul logic. Atunci, o formulă

$$(<(x, y) \& <(y, z)) \rightarrow <(x, z)$$

înseamnă că pentru un triplet numeric arbitrar x, y, z, pentru care au loc relaţiile $<(x, y)$ şi $<(y, z)$, şi relaţia $<(x, z)$ are de asemenea loc.

Cu aceasta am obţinut deja o reprezentare a judecăţilor universale. Totuşi, pentru a putea aplica ideea universalităţii în combinaţie cu negaţia şi conectorii $\&, \vee, \rightarrow$, avem nevoie de un "*cuantificator universal*" special. În caz contrar, n-am şti dacă $\overline{P(x)}$ înseamnă "Pentru orice

x, $\overline{P(x)}$ este cazul", sau "Nu este adevărat că pentru toţi x propoziţia $P(x)$ are loc". Această reprezentare a judecăţilor universale o vom face punând variabila aparţinătoare funcţiei logice corespunzătoare în paranteze înaintea simbolului funcţional.

$(x)A(x)$ înseamnă aşadar: Pentru orice x, $A(x)$ este adevărată. Atunci, cele două judecăţi care tocmai dădeau ocazia unei confuzii sunt deosebite prin $(x)\overline{P(x)}$ şi $\overline{xP(x)}$. Din motive de simetrie, pentru reprezentarea judecăţilor *particulare*, vom introduce un "*cuantificator existenţial*" special. $(Ex)A(x)$ reprezintă judecata: "Există un x pentru care $A(x)$ este adevărată".

Variabila aparţinătoare unui cuantificator universal sau cuantificator existenţial o vom numi "*variabilă legată*". Ea joacă un rol analog variabilei unei integrale în matematică; respectiv, numele acestei variabile este indiferent. Spre deosebire de variabilele legate, celelalte variabile le vom numi "*variabile libere*".

Cu referire la notaţie, trebuie să remarcăm faptul că o formulă în faţa căreia stă un cuantificator universal sau un cuantificator existenţial trebuie pusă în paranteze, în cazul în care ea conţine unul din simbolurile $\&, \vee, \rightarrow$ şi nu este deja acoperită integral de bara negaţiei. Apoi, din motive de concizie vom introduce următoarele convenţii:

În loc de $\overline{A(x)}$ vom scrie, mai simplu, $\overline{A}(x)$,

în loc de $\overline{(x)A(x)}$ vom scrie, mai simplu, $\overline{(x)}A(x)$,

iar în loc de $\overline{ExA(x)}$ vom scrie, mai simplu, $\overline{(Ex)}A(x)$.

Din semnificaţia cuantificatorului universal şi a celui existenţial rezultă următoarele echivalenţe:

$$(Ex)A(x) \text{ eq } \overline{(x)}\ \overline{A}(x),$$

$$(Ex)\overline{A}(x) \text{ eq } \overline{(x)}A(x),$$

$$\overline{(Ex)}A(x) \text{ eq } (x)\overline{A}(x),$$

$$\overline{(Ex)}\ \overline{A}(x) \text{ eq } (x)A(x).$$

Pe baza acestor relaţii intuitive cuantificatorul existenţial se poate înlocui cu cel universal, şi invers. Şi deci în simbolismul calculului predicatelor am putea opera suficient cu trei conectori. Necesari sunt doar simbolul negaţiei, apoi unul dintre cele trei simboluri $\&, \vee, \rightarrow$ şi, în fine, unul dintre cele două simboluri (x), (Ex).

Până acum am considerat doar cazurile în care cuantificatorii universal şi existenţial apar separat. Însă, dacă vom considera faptul că cei doi cuantificatori (universal şi existenţial) pot să apară combinaţi, atunci suntem astfel ghidaţi spre construcţii logice esenţial noi. Această combinaţie este posibilă chiar şi în cazul în care avem în vedere doar predicate monadice; ea joacă însă un rol special în cazul predicatelor n-adice. În cazul unui predicat diadic $A(x, y)$, de exemplu, următoarele combinaţii au cele mai simple forme:

$$(x)(y)A(x, y)$$

"pentru toţi x şi pentru toţi y relaţia $A(x, y)$ are loc";

$$(Ex)(Ey)A(x, y)$$

"există un x şi există un y pentru care $A(x, y)$ are loc";

$$(x)(Ey)A(x, y)$$

"pentru orice x există un y astfel încât $A(x, y)$ are loc";

$$(Ex)(y)A(x, y)$$

"există un x care pentru orice y stă în relaţia $A(x, y)$".

Pentru a face mai clar sensul acestor combinaţii am putea insera de fiecare dată încă o pereche de paranteze şi deci am putea scrie, de exemplu:

$$(x)[(y)A(x, y)]$$

$$(x)[(Ey)A(x, y)].$$

Însă, întrucât şi fără astfel de paranteze nu există ocazia vreunei confuzii, în mod uzual parantezele sunt omise. Dacă se admit combinaţii de

trei sau mai mulţi cuantificatori, atunci, corespunzător, există o varietate mai mare de combinaţii ale celor doi cuantificatori.

Din semnificaţia cuantificatorului universal rezultă că într-o expresie $(x)(y)A(x, y)$ *cei doi cuantificatori universali pot fi permutaţi fără a altera sensul propoziţiei.* Acest lucru este valabil şi despre cei doi cuantificatori existenţiali într-o expresie de forma

$$(Ex)(Ey)A(x, y).$$

În expresia $(x)(Ey)A(x, y)$, dimpotrivă, ordinea simbolurilor (x), (Ey) este esenţială.

De exemplu, expresia

$$(x)(Ey) < (x, y)$$

(unde variabilele x, y se referă la numerele reale ca domeniu de definiţie) constituie o propoziţie *adevărată*, respectiv: "pentru orice număr x există un număr y astfel încât x este mai mic decât y", i.e., "pentru orice număr există unul mai mare".

Însă, dacă în acest caz ordinea simbolurilor (x) şi (Ey) se schimbă, atunci rezultă $(Ey)(x) < (x, y)$, iar aceasta este expresia unei propoziţii *false*, respectiv, "Există un număr y care este mai mare decât orice număr x". Prin permutarea simbolurilor (x) şi (Ey) rezultă aşadar o cu totul altă propoziţie.

Raportul logic aici, pe baza teoremei (demonstrată mai jos)

$$(Ey)(x)A(x, y) \to (x)(Ey)A(x, y),$$

este următorul: dintr-o propoziţie adevărată de forma $(Ey)(x)A(x, y)$ se poate conchide asupra propoziţiei $(x)(Ey)A(x, y)$, nu însă şi invers.

3. Orientare preliminară asupra utilizării calculului predicatelor

Înainte de a da o descriere sistematică a regulilor necesare operării în acest calcul, considerarea câtorva exemple ne va servi familiarizării cu simbolismul.

Mai întâi vom arăta cum anume *axiomele prin care sunt formulate proprietăţile fundamentale ale şirului numerelor naturale* se pot exprima simbolic în calculul predicatelor.

Aceste axiome sunt:

1. *Pentru fiecare număr există un şi numai un succesor imediat.*
2. *Nu există niciun număr pentru care* 1 *este succesor imediat.*
3. *Pentru orice număr diferit de* 1 *există un şi numai un predecesor imediat.*

În aceste propoziţii, drept predicate individuale apar relaţia ”a fi succesor imediat al” şi ”a fi diferit de” cu referire la numere. Relaţia ”a fi diferit de” este implicată nu doar în legătură cu expresia ”diferit de 1”, ci şi implicit în expresia ”numai un număr”; deoarece a spune că există ”numai un” număr cu o anumită proprietate înseamnă că nu există două astfel de numere diferite. Faptul de a fi diferit este opusul egalităţii aritmetice.

Vom introduce aşadar predicatele:

$$= (x, y) \quad (\text{”}x \text{ este egal cu } y\text{”})$$

şi

$$S(x, y) \quad (\text{”}y \text{ îi succede imediat lui } x\text{”})$$

iar cu aceste notaţii axiomele de mai sus le putem reda precum urmează:

1. $(x)(Ey)\{S(x, y)\&(z)(S(x, z) \to = (y, z))\}$,

i.e., ”pentru orice x există un y care-i succede imediat lui x şi care este egal oricărui z care-i succede imediat lui x”.

2. $\overline{(Ex)}S(x, 1)$,

i.e., ”nu există niciun x căruia 1 îi succede imediat”.

3. $(x)\{\overline{=(x,1)} \to (Ey)[S(y,x)\&(z)(S(z,x) \to = (y,z))]\}$, i.e., "pentru orice x diferit de 1, există un y căruia x îi succede imediat şi care este egal oricărui z căruia x îi succede imediat".

Prin câteva exemple simple, ne vom îndrepta atenţia în cele ce urmează spre metode de *demonstraţie* în calculul predicatelor. Vom începe cu acea propoziţie a cărei nedemonstrabilitate în calculul celui de-al doilea capitol a constituit unul din faptele prin care am clarificat inadecvarea acelui calcul. Propoziţia era următoarea: "Dacă există un fiu, atunci există un tată". Expresia simbolică a acestei aserţiuni în calculul predicatelor este următoarea:

$$(Ex)F(x) \to ExT(x).$$

Aici $F(x)$ înseamnă: "x este un fiu" iar $T(x)$: "x este un tată". O demonstraţie a acestei propoziţii este posibilă doar dacă analizăm conceptual predicatele care apar în propoziţie. În conceptul "fiu" sunt conţinute, pe de-o parte, predicatul "băiat", iar pe de altă parte relaţia fiului cu părinţii; în conceptul "tată" relaţia cu femeia şi copilul.

Corespunzător, dacă pentru "x este băiat" vom introduce simbolul $B(x)$ iar predicatul "x şi y sunt părinţii lui z" (sau mai precis: "x şi y ca bărbat şi femeie au z drept copil") îl vom reda prin simbolul $C(x, y, z)$, atunci $F(x)$ îl putem defini prin:

$$B(x)\&(Eu)(Ev)C(u, v, x)$$

("x este fiu" înseamnă "x este băiat şi există un u şi un v astfel încât u ca bărbat şi v ca femeie sunt părinţii cu x").

Similar, $T(x)$ este definit prin:

$$(Ey)(Ez)C(x, y, z)$$

("x este un tată" înseamnă "există un y şi un z astfel că x şi y ca bărbat şi femeie sunt părinţii lui z").

Dacă vom introduce expresiile deja obţinute pentru $F(x)$ şi $T(x)$, atunci aserţiunea pe care o avem în vedere ia următoarea formă:

$$(Ex)[B(x)\&(Eu)(Ev)C(u, v, x)] \to (Ex)(Ey)(Ez)C(x, y, z).$$

Această formulă exprimă o relaţie de implicaţie între două propoziţii, iar pentru demonstraţia pe care o căutăm ideea este ca din prima dintre aceste propoziţii să ajungem la cea de-a doua printr-un şir de implicaţii, fiecare fiind întemeiată prin regulile calculului. Pentru aceasta vom aplica principiul cunoscut de noi din calculul propoziţional şi, fireşte, valid şi în calculul predicatelor, potrivit căruia din două implicaţii $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ şi $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ se poate întotdeauna infera $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$.

Acum, mai întâi, în calculul predicatelor, corespunzător formulei propoziţionale $X \& Y \to Y$, următoarea relaţie are loc pentru F şi G arbitrare:

$$(Ex)(F(x) \& G(x)) \to (Ex)G(x).$$

Dacă pentru expresia $(Eu)(Ev)C(u, v, x)$, care este un predicat de x, vom pune abreviat $N(x)$, atunci obţinem

$$F(x) \text{ eq } B(x) \& N(x).$$

Atunci implicaţia de mai sus dă:

$$(Ex)F(x) \to (Ex)N(x),$$

sau prin substituţia expresiei pentru $N(x)$:

$$(Ex)F(x) \to (Ex)(Eu)(Ev)C(u, v, x).$$

Acum, există o teoremă generală a calculului predicatelor potrivit căreia într-un şir neîntrerupt de cuantificatori existenţiali ordinea cuantificatorilor poate fi schimbată. Pentru doi cuantificatori existenţiali această teoremă am menţionat-o deja; teorema generală rezultă din aceasta prin aplicaţii repetate. Dacă vom face această schimbare, atunci în locul ultimei formule vom obţine:

$$(Ex)F(x) \to (Eu)(Ev)(Ex)C(u, v, x).$$

Aceasta este însă aserţiunea noastră iniţială, doar că variabilele de după simbolul $\to$ sunt denumite altfel.

Un alt exemplu îl constituie propoziţia:

"*Dacă există un efect, atunci există o cauză*".

Mai întâi redăm aserţiunea în următoarea formă:

$$(Ex)E(x) \to (Ex)C(x).$$

$E(x)$ înseamnă: "x este un efect", iar $C(x)$: "x este o cauză. Din nou, analizăm predicatele C şi E prin introducerea predicatului diadic "x produce y", pentru care vom alege simbolul $P(x, y)$. Procedând astfel, pentru $C(x)$ şi $E(x)$ rezultă următoarele expresii care le definesc:

$$C(x) \text{ eq } (Ey)P(x, y)$$
$$E(x) \text{ eq } (Ey)P(y, x).$$

Prin substituţia acestor expresii aducem aserţiunea la următoarea formă:

$$(Ex)(Ey)P(y, x) \to (Ex)(Ey)P(x, y)$$

sau, prin redenumirea variabilelor în antecedent,

$$(Ey)(Ex)P(x, y) \to (Ex)(Ey)P(x, y).$$

Această formulă este o consecinţă imediată a teoremei despre permutabilitatea cuantificatorilor existenţiali.

Diferenţa mai sus menţionată dintre $(Ex)(y)A(x, y)$ şi $(y)(Ex)A(x, y)$ se poate ilustra şi prin exemplul *convergenţei uniforme şi uzuale* (*simple*). Să considerăm un şir definit de funcţii univoce $f_1(x), f_2(x), \ldots$, ale căror valori sunt numere reale şi care (putem presupune, din motive de simplificare) sunt definite pentru toate valorile reale ale lui x. În simbolismul nostru propoziţia că acest şir de funcţii converge către 0 pentru orice valoare a lui x se poate formula astfel:

$$(x)(z)\{< (0, z) \to (Ey)(n)[< (y, n) \to < (|f_n(x)|, z)]\}.$$

("Pentru un x arbitrar, există, pentru orice z mai mare decât 0, un y astfel încât pentru toţi n mai mari decât y, inegalitatea $|f_n(x)| < z$ este satisfăcută"). Aici variabilele y şi n se referă la numerele întregi ca domeniu de obiecte, pe când x şi z se referă la domeniul numerelor reale.

Pentru aserţiunea că şirul funcţiilor converge *uniform* către 0 pentru toate valorile lui x, expresia simbolică arată astfel:

$$(z)\{< (0, z) \to (Ey)(x)(n)[< (y, n) \to < (|f_n(x)|, z)]\}.$$

("Pentru orice z mai mare decât 0, există un y, astfel încât pentru toţi x şi pentru toţi n mai mari decât y, inegalitatea $|f_n(x)| < z$ este satisfăcută").

Deosebirea dintre cele două aserţiuni îşi găseşte expresia sa în poziţiile diferite ale cuantificatorului universal (x).

4. Notaţie riguroasă pentru calculul predicatelor

Drept parte preliminară la o tratare sistematică a calculului predicatelor, vom oferi mai întâi o trecere în revistă a notaţiilor utilizate.

Simbolurile care apar în calculul predicatelor sunt, înainte de toate, simboluri pentru *variabile* de diferite genuri. Simbolurile pentru variabile sunt întotdeauna majuscule sau minuscule latine. Deosebim astfel:

1. *Variabile propoziţionale*: $X, Y, Z, \ldots$
2. *Variabile individuale*: $x, y, z, \ldots$
3. *Variabile predicative*: $F(\cdot)$, $G(\cdot,\cdot)$, $H(\cdot,\cdot,\cdot), \ldots$

Aici variabilele predicative cu numere diferite de locuri pentru argumente sunt considerate întotdeauna ca variabile distincte, chiar şi atunci când majuscula latină este aceeaşi.

Vom explica acum ce anume trebuie înţeles printr-o *formulă* a calculului predicatelor.

Provizoriu, putem mai întâi spune că printr-o formulă înţelegem o expresie care se construieşte, într-o manieră cu sens, din simbolurile menţionate pentru variabile cu ajutorul conectorilor propoziţionali $\&, \vee, ^{-}, \rightarrow, \sim$ şi al cuantificatorilor universal şi existenţial. Totuşi, păstrarea punctului de vedere axiomatic, expus în paragraful următor, în care demonstraţiile au loc în acord cu reguli pur formale, fără a apela la semnificaţia simbolurilor logice, reclamă caracterizarea expresiilor desemnate ca formule doar prin descrierea constituţiei lor formale, evitând concepte precum "cu sens".

Mai întâi, despre forma formulelor vom mai spune anticipativ doar că în ele apar eventual variabile individuale, i.e., minuscule latine, cu

cuantificatorii universal şi existenţial corespunzători. Acum, dacă într-o formulă, simultan cu o variabilă individuală, de exemplu x, apare un cuantificator universal sau unul existenţial (şi deci în cazul de faţă (x) sau (Ex)), atunci variabila respectivă se numeşte *legată* în formulă, în caz contrar se numeşte *liberă*.

Prin *formule* vom înţelege acum acele şi doar acele combinaţii de simboluri ale calculului nostru care rezultă ca atare printr-un număr finit de aplicaţii ale următoarelor reguli:

1. O variabilă propoziţională este o formulă.

2. Variabilele predicative, ale căror locuri pentru argumente sunt umplute de variabile individuale, sunt formule.

3. Dacă orice combinaţie $\mathfrak{A}$ de simboluri este o formulă, atunci şi $\overline{\mathfrak{A}}$ este o formulă.

4. Dacă $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}$ sunt formule arbitrare astfel încât aceeaşi variabilă individuală nu apare legată în una şi liberă în cealaltă, atunci $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ sunt de asemenea formule.

5. Dacă $\mathfrak{A}(x)$ este o formulă arbitrară în care x apare ca variabilă liberă, atunci şi $(x)\mathfrak{A}(x)$ şi $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ sunt formule. Acest lucru este valabil, corespunzător, şi pentru celelalte variabile libere.

Menţionăm explicit faptul că, în acord cu această definiţie, într-o formulă aceeaşi variabilă nu poate să apară simultan liberă şi legată.

În vederea *eliminării parantezelor*, introducem următoarele convenţii: în delimitarea expresiilor simbolurile $\rightarrow, \vee, \&, \sim$ au prioritate în raport cu cuantificatorul universal şi cel existenţial. De exemplu, $(x)F(x)\&A$ este o notaţie mai simplă pentru $((x)F(x))\&A$. Notaţiile precedente, potrivit cărora & leagă mai tare decât $\rightarrow$ şi $\sim$, iar $\vee$, din nou, leagă mai tare decât &, le vom păstra şi aici. Apoi, fiecărui cuantificator universal sau existenţial care apare într-o formulă îi aparţine o anumită parte componentă a formulei, la care el se referă. Această parte o vom numi *domeniul de acţiune* al simbolului respectiv. Astfel, în formula

$$(x)(F(x) \rightarrow (Ey)G(y))$$

domeniul de acţiune al simbolului (x) se întinde până la capătul formulei, pe când în formula

$$(x)F(x) \to (Ey)G(y)$$

el se întinde doar până la simbolul $\to$. Un alt mod de a reduce numărul parantezelor îl obţinem prin următoarea regulă: Dacă mai mulţi cuantificatori universali sau existenţiali se succed fără a fi separaţi prin paranteze, atunci acest lucru trebuie întotdeauna înţeles astfel că domeniile lor de acţiune se întind până în acelaşi loc. Astfel, de exemplu,

$$(x)(Ey)(z)(H(x,y,z)\&K(y,z))\&L(u)$$

este o notaţie mai simplă pentru

$$(x)\{(Ey)[(z)(H(x,y,z)\&K(y,z))]\}\&L(u).$$

Pentru a evita erorile, vom explica încă o dată utilizarea *majusculelor germane*, pe care, pentru calculul propoziţional, am dat-o deja pe scurt mai înainte (Cap. 1, §5). Aceste litere nu sunt simboluri ale limbajului nostru formal şi sunt în principiu dispensabile. Ele servesc doar pentru a îmbrăca într-o formă mai scurtă aserţiunile intuitive despre calcul. În astfel de aserţiuni, cu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ vom desemna formule arbitrare a căror expresie formală exactă este lăsată nespecificată. De exemplu, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ reprezintă o implicaţie arbitrară, precum $(A \to B) \to (B \to C)$ sau $(x)F(x) \to (x)G(x)$. Cu $\mathfrak{A}(x)$ denotăm o formulă arbitrară care conţine variabila liberă x; similar, cu $\mathfrak{A}(x,y)$ denotăm o formulă în care apar variabilele libere x şi y ş.a.m.d.

5. Axiomele calculului predicatelor

Vom trece acum, aşa cum am procedat anterior pentru calculul propoziţional, la elaborarea unui sistem axiomatic pentru calculul predicatelor, din care se pot obţine toate celelalte propoziţii adevărate ale calculului predicatelor în acord cu anumite reguli.

Stabilirea axiomelor şi a regulilor de deducţie se face, fireşte, în concordanţă cu interpretarea intuitivă a formulelor. Însă derivarea din

axiome a formulelor ”adevărate” trebuie să fie pur formală, corespunzător punctului de vedere axiomatic; aşa că nu suntem nicidecum interesaţi de sensul propoziţiilor exprimate prin formule, ci exclusiv de considerarea prescripţiilor conţinute în reguli. Numai în interpretarea rezultatelor obţinute prin operaţiile formale trebuie să luăm în considerare semnificaţia simbolurilor calculului nostru.

Această interpretare intuitivă are loc în următorul mod. Presupunem ca dat un domeniu de indivizi, la care variabilele individuale şi cuantificatorii universal şi existenţial se referă. Acest domeniu îl lăsăm nespecificat; presupunem doar că el conţine cel puţin un individ. O formulă a calculului predicatelor se numeşte logic adevărată sau, cum mai spunem, *universal validă*, doar dacă indiferent de alegerea domeniului de indivizi, pentru orice substituţie de propoziţii definite, de obiecte ale domeniului de indivizi, de predicate definite în domeniul de indivizi, pentru, respectiv, variabile propoziţionale, variabile individuale libere şi variabile predicative, formula devine întotdeauna o propoziţie adevărată. Formulele universal valide ale calculului predicatelor le vom numi, simplu, *formule identice* sau *valide*.

Vom expune acum sistemul axiomatic pentru calculul predicatelor. Drept formule logice primitive avem mai întâi axiomele calculului propoziţional, pe care din motive de simplitate le vom reda în forma lor precedentă.

a) $X \vee X \rightarrow X$,

b) $X \rightarrow X \vee Y$.

c) $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$.

d) $(X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$.

(Din nou, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ trebuie înţeleasă ca o abreviere pentru $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$).

La acestea se adaugă acum, ca o a doua grupă, două *axiome* pentru ”toţi” şi ”există”.

e) $(x)F(x) \rightarrow F(y)$.

f) $F(y) \rightarrow (Ex)F(x)$.

Prima dintre aceste axiome înseamnă: "Dacă un predicat F are loc despre toţi x, atunci el are loc şi pentru un y arbitrar."

A doua formulă se interpretează astfel: "Dacă predicatul F are loc despre un y oarecare, atunci există un x pentru care F are loc."

Pentru obţinerea de noi formule din formulele logice primitive, dar şi din formulele deja derivate, avem următoarele reguli.

α) *Regulile Substituţiei*

α1) O variabilă propoziţională care apare într-o formulă se poate înlocui cu o formulă arbitrară, cu condiţia că această înlocuire are loc simultan în toate ocurenţele variabilei propoziţionale respective şi că prin această operaţie rezultă din nou o formulă în sensul definiţiei date în paragraful precedent. În plus, substituţia este admisă doar atunci când formula cu care variabila se substituie nu conţine nicio variabilă individuală care în formula iniţială apare legată.

α2) O variabilă individuală liberă poate fi înlocuită cu orice altă variabilă individuală, cu condiţia că înlocuirea are loc simultan în toate ocurenţele variabilei libere. Apoi, variabila substituită nu trebuie să apară legată în nicio ocurenţă în formula iniţială.

α3) O variabilă predicativă cu n locuri pentru argumente poate fi înlocuită, în anumite circumstanţe, cu o formulă care conţine cel puţin n variabile individuale libere. Fie F o variabilă predicativă cu n locuri pentru argumente, iar $\mathfrak{A}$ formula în care F trebuie înlocuită. Dintre variabilele individuale care apar în formula cu care F se substituie selectăm oricare n variabile şi le ordonăm într-un mod arbitrar, să zicem $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Formula cu care facem substituţia o vom denota corespunzător cu $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Acum, substituţia este permisă doar dacă restul variabilelor individuale libere care pot eventual să apară în $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nu apar în formula $\mathfrak{A}$ ca variabile legate. [Apoi, locurile pentru argumente ale lui F în formula A nu pot fi ocupate în nicio ocurenţă de variabile care în $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ apar în formă legată].*

*Expresia pusă în [...] nu apare în ediţia a II-a (pe care o traducem aici), dar apare în ediţia a VI-a, p. 90 (germ.) Theorema XIII; probabil şi datorată observaţiei lui

Rezultatul substituţiei, din nou, trebuie să fie o formulă. Substituţia are loc în următorul fel: Considerăm orice ocurenţă anume a variabilei predicative F în $\mathfrak{A}$ în care locurile pentru argumente ale variabilelor sunt ocupate cu variabile oarecare, pe care (pentru moment) le vom denota cu $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$. Aceste $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ nu trebuie să fie toate diferite între ele, ci parţial se poate opera cu aceleaşi variabile. Vom înlocui $F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ în acea ocurenţă cu $\mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, i.e., cu formula care rezultă din $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ când variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se înlocuiesc în toate ocurenţele lor cu, respectiv, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$. Înlocuirea corespunzătoare trebuie făcută în fiecare ocurenţă individuală a lui F.

β) Regula Detaşării

Din două formule de forma $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ se obţine o nouă formulă $\mathfrak{B}$.

γ) Regulile pentru cuantificatorii universal şi existenţial

γ1) Fie derivată o formulă de forma $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)$, în care partea de după simbolul $\rightarrow$ conţine variabila liberă x iar x nu apare în $\mathfrak{A}$. Atunci se obţine ca formulă nou derivată $\mathfrak{A} \rightarrow (x)\mathfrak{B}(x)$.

γ2) Sub aceleaşi condiţii cu referire la forma formulelor $\mathfrak{A}$ şi $\mathfrak{B}(x)$, din formula $\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$ se obţine noua formulă $(Ex)\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$.[3]

δ) Regulile redenumirii variabilelor legate

O variabilă individuală care apare legată într-o formulă se poate înlocui cu orice altă variabilă legată. Această înlocuire trebuie făcută simultan în toate ocurenţele ei din domeniul de acţiune al unui cuantificator şi în cuantificatorul universal sau existenţial corespunzător. Condiţia este aici ca prin înlocuire să rezulte din nou o formulă. Dacă variabila

---

Church (comp. A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Part I, p. 63, Princeton 1944) după care expresia acestei reguli la Hilbert şi Ackermann este incompletă.

[3]Sistemul axiomatic pentru cuantificatorii universal şi existenţial utilizat aici, exprimat în formulele e) şi f) cât şi în Regulile γ, este datorat lui P. Bernays.

care trebuie înlocuită apare de mai multe ori, i.e., în mai multe domenii de acţiune, atunci înlocuirea trebuie făcută doar în unul singur.

6. Sistemul formulelor universal valide

Vom vedea acum modul în care, cu ajutorul formulelor logice primitive şi al regulilor de deducţie, se constituie întregul sistem al formulelor *universal valide* sau, cum mai spunem, al formulelor *identice* ale calculului predicatelor.

Cu un subsistem al acestor formule suntem deja familiarizaţi, şi anume cu acela în care apar doar variabile propoziţionale. Pentru acest subsistem mai înainte am derivat Teoremele (1)-(20) şi Regulile I-VIII. Acest subsistem îl vom numi sistemul formulelor *universal valide ale calculului propoziţional.*

Mai întâi, prin câteva exemple, trebuie explicată metoda prin care trebuie să se procedeze în derivarea teoremelor. Apoi, aşa cum am procedat anterior în calculul propoziţional, vom obţine şi noi reguli de deducţie. Pentru aceasta vor fi utilizate teoremele şi regulile calculului propoziţional, derivate anterior.

Regula γ'). *Fie $\mathfrak{A}(x)$ o formulă demonstrabilă care conţine variabila liberă x. Atunci şi $(x)\mathfrak{A}(x)$ este demonstrabilă.*

Demonstraţie. Prin aplicarea Regulilor II şi III, din $\mathfrak{A}(x)$ se obţine

$\overline{X \vee \overline{X}} \vee \mathfrak{A}(x)$,

$\overline{X \vee \overline{X}} \vee (x)\mathfrak{A}(x)$ [prin Regula γ)],

$X \vee \overline{X}$ [Teorema (3)],

$(x)\mathfrak{A}(x)$ [Regula detaşării].

Regula δ'). *Toate variabilele libere şi legate dintr-o formulă se pot înlocui cu alte variabile, cu condiţia că orice variabilă este înlocuită în toate ocurenţele ei din formulă cu aceeaşi nouă variabilă iar variabilele distincte sunt înlocuite, corespunzător, în ocurenţele lor, cu variabile distincte.*

Demonstraţia rezultă prin aplicarea repetată a Regulilor $\alpha 2)$ şi $\delta)$. De exemplu, din formula primitivă e) se obţine teorema $(y)F(y) \to F(x)$, în următorul mod:

$(x)F(x) \to F(y)$,
$(x)F(x) \to F(z)$ [prin Regula $\alpha 2)$],
$(y)F(y) \to F(z)$ [prin Regula $\delta)$],
$(y)F(y) \to F(x)$ [prin Regula $\alpha 2)$].

Din Regula δ' rezultă că Regula $\gamma)$ rămâne validă dacă în formularea regulii pentru x se utilizează peste tot y sau orice altă variabilă.

Teorema 21. $(x)(F(x) \vee \overline{F}(x))$.

Demonstraţie. $X \vee \overline{X}$ [Teorema 3],
$F(x) \vee \overline{F}(x)$ [prin Substituţie],
$(x)(F(x) \vee \overline{F}(x))$ [prin Regula γ')].

Teorema 22. $(x)F(x) \to (Ex)F(x)$.

Demonstraţie. $(x)F(x) \to F(y)$ [Axioma e)],
$F(y) \to (Ex)F(x)$ [Axioma f)],
$(x)F(x) \to (Ex)F(x)$ [Regula V].

Teorema 23. $(x)(A \vee F(x)) \to A \vee (x)F(x)$.

Demonstraţie. $(y)(A \vee F(y)) \to A \vee F(x)$ [substituţia în Axioma e), Regula δ')],
$(y)(A \vee F(y)) \to \overline{\overline{A}} \vee F(x)$ [substituţia lui $\overline{\overline{A}}$ pentru A].

Folosind abrevierea $\to$ se poate scrie şi:

$(y)(A \vee F(y)) \to (\overline{A} \to F(x))$,
$[(y)(A \vee F(y))\&\overline{A}] \to F(x)$ [prin Regula VII],
$[(y)(A \vee F(y))\&\overline{A}] \to (x)F(x)$ [Regula γ)].

Cu ajutorul Regulii VII şi al Regulii $\delta)$, această expresie se transformă înapoi în

$$(x)(A \vee F(x)) \to A \vee (x)F(x).$$

Teorema 24. $(x)(A \to F(x)) \to (A \to (x)F(x))$.

Demonstraţie. Această teoremă se obţine din cea precedentă prin substituţia lui $\overline{A}$ pentru A.

Regula IX. *Dacă* $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}(x))$ *este demonstrabilă, atunci tot astfel este şi* $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to (x)\mathfrak{C}(x))$. *Aici* $\mathfrak{A}$ *şi* $\mathfrak{B}$ *nu trebuie să conţină variabila* x.

Aceasta este o extensie a Regulii $\gamma 1$). În locul celor doi antecedenţi, se poate lua şi orice alt număr finit de antecedenţi. Demonstraţia corespunde întru totul cazului de faţă.

Demonstraţie. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}(x))$,

$\mathfrak{A} \to (x)(\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}(x))$ [Regula γ)].

Formula căutată rezultă din această ultimă formulă prin aplicarea Teoremei 24 şi a Regulii V.

Teorema 25. $A \to (x)(A \vee F(x))$.

Demonstraţie. $A \to A \vee B$ [Axioma b)],

$A \to A \vee F(x)$ [prin substituţie],

$A \to (x)(A \vee F(x))$ [prin Regula γ)].

Teorema 26. $(x)(A \vee F(x)) \sim A \vee (x)F(x)$.

Demonstraţie. Întrucât Teorema 23 este demonstrată, este suficient să se demonstreze conversa: $A \vee (x)F(x) \to (x)(A \vee F(x))$.

$(y)F(y) \to F(x)$ [din e) prin Regula δ')],

$A \vee (y)F(y) \to A \vee F(x)$ [prin Regula IV],

$A \vee (x)F(x) \to (x)(A \vee F(x))$ [prin Regulile γ) şi δ)].

Teorema 27. $(x)(A \to F(x)) \sim (A \to (x)F(x))$.

Demonstraţie. Această teoremă se obţine din Teorema 26, aşa cum Teorema 24 se obţine din Teorema 23.

Teorema 28. $(x)(A\&F(x)) \sim A\&(x)F(x)$.

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi:

I. $(x)(A\&F(x)) \to A\&(x)F(x)$.

$(y)(A\&F(y)) \to A\&F(x)$,

$A\&F(x) \to F(x)$ [Teorema 13],

$(y)(A\&F(y)) \to F(x)$ [Regula V],

$(x)(A\&F(x)) \to (x)F(x)$ [Regulile γ) şi δ)],

$A\&F(x) \to A$,

$(x)(A\&F(x)) \to A$ [Regulile V şi δ)].

Folosind teorema calculului propoziţional

$$(X \to Y) \to [(X \to Z) \to (X \to Y \& Z)],$$

şi printr-o dublă aplicare a Regulii Detaşării din ultima şi antepenultima formulă se obţine formula I.

II. $A\&(x)F(x) \to (x)(A\&F(x))$.

$(y)F(y) \to F(x)$;

din această formulă, prin calculul propoziţional, se obţine

$A\&(y)F(y) \to A\&F(x)$,

$A\&(x)F(x) \to (x)(A\&F(x))$ [Regulile γ) şi δ)].

Teorema 28 rezultă din formulele I şi II.

Teorema 29. $(x)(y)F(x,y) \sim (y)(x)F(x,y)$.

Demonstraţie. $(z)(u)F(z,u) \to (u)F(x,u)$ [substituţie în Axioma e) şi Regula δ')],

$(u)F(x,u) \to F(x,y)$ [substituţie în Axioma e) şi Regula δ')],

$(z)(u)F(z,u) \to F(x,y)$ [prin Regula V],

$(z)(u)F(z,u) \to (x)F(x,y)$ [Regula γ)],

$(x)(y)F(x,y) \to (y)(x)F(x,y)$ [Regulile γ) şi δ)].

Procedând similar vom obţine $(y)(x)F(x,y) \to (x)(y)F(x,y)$, şi astfel Teorema 29.

Teorema 30. $(x)(F(x)\&G(x)) \sim (x)F(x)\&(x)G(x)$.

Demonstraţie. Mai întâi vom arăta

a) $(x)(F(x)\&G(x)) \to (x)F(x)\&(x)G(x)$.

$(y)(F(y)\&G(y)) \to F(x)\&G(x)$,

$F(x)\&G(x) \to F(x)$,

$F(x)\&G(x) \to G(x)$,

$(y)(F(y)\&G(y)) \to F(x)$ [prin Regula V],

$(y)(F(y)\&G(y)) \to G(x)$ [prin Regula V].

Prin Regulile γ) şi δ), cele două formule pot fi transformate în:

$$(x)(F(x)\&G(x)) \to (x)F(x).$$

$$(x)(F(x)\&G(x)) \to (x)G(x).$$

Şi deci, din cele două formule se obţine

$$(x)(F(x)\&G(x)) \to (x)F(x)\&(x)G(x).$$

b) Demonstraţia formulei $(x)F(x)\&(x)G(x) \to (x)(F(x)\&G(x))$.

$(y)F(y) \to F(x)$,

$(y)G(y) \to G(x)$,

$(y)F(y)\&(y)G(y) \to F(x)\&G(x)$,

$(x)F(x)\&(x)G(x) \to (x)(F(x)\&G(x))$ [Regulile γ) şi δ)].

Teorema 30 se obţine din a) şi b).

Teorema 31. $(x)(F(x) \to G(x)) \to ((x)F(x) \to (x)G(x))$.

Demonstraţie. $(y)(F(y) \to G(y)) \to (F(x) \to G(x))$,

$F(x) \to ((y)(F(y) \to G(y)) \to G(x))$ [prin Regula VII],

$(y)F(y) \to F(x)$,

$(y)F(y) \to ((y)(F(y) \to G(y)) \to G(x))$ [Regula V],

$(y)F(y)\&(y)(F(y) \to G(y)) \to G(x)$ [Regula VII],

$(x)F(x)\&(x)(F(x) \to G(x)) \to (x)G(x)$ [Regulile γ) şi δ)],

$(x)(F(x) \to G(x)) \to ((x)F(x) \to (x)G(x))$ [Regula VII].

Teorema 32. $(x)(F(x) \sim G(x)) \to ((x)F(x) \sim (x)G(x))$.

Demonstraţie. $(x)(F(x) \sim G(x))$ este o abreviere pentru

$$(x)[(F(x) \to G(x))\&(G(x) \to F(x))].$$

Prin substituţie în Teorema 30 se obţine:

$$(x)[(F(x) \to G(x))\&(G(x) \to F(x))] \sim (x)(F(x) \to G(x))\& (x)(G(x) \to F(x)).$$

Prin Teorema 31 avem:

$$(x)(F(x) \to G(x)) \to ((x)F(x) \to (x)G(x)),$$

$$(x)(G(x) \to F(x)) \to ((x)G(x) \to (x)F(x)).$$

Avem aşadar trei formule de forma:

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}\&\mathfrak{C},$$

$$\mathfrak{B} \to (\mathfrak{D} \to \mathfrak{E}),$$

$$\mathfrak{C} \to (\mathfrak{E} \to \mathfrak{D}).$$

Din aceste formule se poate deriva $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{D} \sim \mathfrak{E})$. Aceasta este însă teorema noastră, dacă $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ şi $\mathfrak{E}$ se înlocuiesc cu formulele pe care acestea le denotă.

Teorema 33.

a) $(Ex)F(x) \sim \overline{(x)}\,\overline{F}(x)$.

b) $(Ex)\overline{F}(x) \sim \overline{(x)}F(x)$.

c) $\overline{(Ex)}\,\overline{F}(x) \sim (x)F(x)$.

d) $\overline{(Ex)}F(x) \sim (x)\overline{F}(x)$.

Demonstraţie pentru 33a).

$(y)\overline{F}(y) \to \overline{F}(x)$,

$\overline{\overline{F}}(x) \to \overline{(y)}\,\overline{F}(y)$ [prin Teorema 6],

$F(x) \to \overline{(y)}\,\overline{F}(y)$ [înlocuirea lui $\overline{\overline{F}}(x)$ cu $F(x)$],

$(Ex)F(x) \to \overline{(x)}\,\overline{F}(x)$ [prin Regulile γ) şi δ)].

Aceasta este prima jumătate a Teoremei 33a).

$F(x) \to (Ey)F(y)$ [din Axioma f)],

$\overline{(Ey)}F(y) \to \overline{F}(x)$ [prin Teorema 6],

$\overline{(Ex)}F(x) \to (x)\overline{F}(x)$ [Regulile γ) şi δ)],

$\overline{(x)}\,\overline{F}(x) \to \overline{\overline{(Ex)}}F(x)$ [prin Teorema 6],

$\overline{(x)}\,\overline{F}(x) \to (Ex)F(x)$ [înlocuirea lui $\overline{\overline{(Ex)}}F(x)$ cu $(Ex)F(x)$].

Aceasta este cealaltă jumătate a Teoremei 33a).

Demonstraţia pentru 33b).

$A \sim \overline{\overline{A}}$,

$F(x) \sim \overline{\overline{F}}(x)$ [prin substituţie],

$(x)(F(x) \sim \overline{\overline{F}}(x))$ [Regula γ')].

Din această formulă, prin utilizarea Teoremei 32, se obţine:

$(x)F(x) \sim (x)\overline{\overline{F}}(x)$,

$\overline{(x)}F(x) \sim \overline{(x)}\,\overline{\overline{F}}(x)$ [prin $(X \sim Y) \to (\overline{X} \sim \overline{Y})$,
comp. formula (26) Cap. 1, §2].

Prin substituţie în 33a) rezultă:

$$(Ex)\overline{F}(x) \sim \overline{(x)}\,\overline{\overline{F}}(x),$$

şi deci

$$\overline{(x)}F(x) \sim (Ex)\overline{F}(x).$$

Iar aceasta este Teorema 33b).

Din Teoremele 33a) şi 33b) se obţin şi Teoremele 33d) şi 33c), întrucât $\overline{\mathfrak{A}} \sim \mathfrak{B}$ poate fi demonstrată din $\mathfrak{A} \sim \overline{\mathfrak{B}}$.

Teorema 34. $(x)(F(x) \to G(x)) \to ((Ex)F(x) \to (Ex)G(x))$.

Demonstraţie. Din formula propoziţională

$$(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A}),$$

prin substituţie, se obţine:

$$(F(x) \to G(x)) \to (\overline{G}(x) \to \overline{F}(x)),$$

$$(x)\{(F(x) \to G(x)) \to (\overline{G}(x) \to \overline{F}(x))\} \quad [\text{prin Regula } \gamma')].$$

Din această ultimă formulă, prin utilizarea Teoremei 31, se obţine

$$(x)\{F(x) \to G(x)\} \to (x)\{\overline{G}(x) \to \overline{F}(x)\},$$

din care, prin încă o utilizare a Teoremei 31 şi a Regulii V, se obţine:

$$(x)(F(x) \to G(x)) \to ((x)\overline{G}(x) \to (x)\overline{F}(x)).$$

În această formulă, prin utilizarea Teoremei 6, $(x)\overline{G}(x) \to (x)\overline{F}(x)$ poate fi transformată în $\overline{(x)}\ \overline{F}(x) \to \overline{(x)}\ \overline{G}(x)$. Întrucât $\overline{(x)}\ \overline{F}(x) \sim (Ex)F(x)$ iar $\overline{(x)}\ \overline{G}(x) \sim (Ex)G(x)$, rezultă teorema avută în vedere.

Teoremei 34 îi corespunde următoarea regulă: Dacă $\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)$ este demonstrabilă, atunci şi $(Ex)\mathfrak{A}(x) \to (Ex)\mathfrak{B}(x)$ se poate deriva; deoarece prin Regula γ'), din $\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)$ se obţine

$$(x)(\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)),$$

iar prin utilizarea Teoremei 34, $(Ex)\mathfrak{A}(x) \to (Ex)\mathfrak{B}(x)$.

Aşa cum din Teorema 31 se poate deriva Teorema 32, tot astfel din Teorema 34 se poate obţine

Teorema 34′. $(x)(F(x) \sim G(x)) \to ((Ex)F(x) \sim (Ex)G(x))$.

Teorema 35. $(x)(F(x) \to A) \sim ((Ex)F(x) \to A)$.

Demonstraţie. $(x)(F(x) \to A)$ este o abreviere pentru $(x)(\overline{F}(x) \vee A)$. Formula

$$(x)(\overline{F}(x) \vee A) \sim (x)\overline{F}(x) \vee A$$

este de asemenea o teoremă şi se demonstrează similar Teoremei 26.

$$(x)\overline{F}(x) \sim \overline{(Ex)}F(x),$$

$$(x)\overline{F}(x) \vee A \sim \overline{(Ex)}F(x) \vee A.$$

Dacă din nou se introduce abrevierea $\rightarrow$, atunci rezultă Teorema 35.

Teorema 36. $(Ex)(y)F(x,y) \rightarrow (y)(Ex)F(x,y)$.

Aceasta este Teorema permutării deja menţionată mai înainte, despre care s-a subliniat faptul că este validă doar ca implicaţie, conversa nefiind validă.

Demonstraţie. $F(x,y) \rightarrow (Ez)F(z,y)$ [substituţie în Axioma f) şi Regula δ')],

$(y)(F(x,y) \rightarrow (Ez)F(z,y))$ [Regula γ')].

Prin utilizarea Teoremei 31, rezultă:

$(y)F(x,y) \rightarrow (y)(Ez)F(z,y)$,

$(Ex)(y)F(x,y) \rightarrow (y)(Ex)F(x,y)$ [prin Regulile γ) şi δ)].

7. Regula înlocuirii. Construcţia contradictoriei unei formule

După ce am demonstrat o serie de formule universal valide, vom analiza acum câteva reguli generale care sunt de o relevanţă specială pentru obţinerea unei imagini de ansamblu cu privire la întregul sistem al formulelor universal valide.

Ca o primă regulă, vom avea o extensie a Regulii VI. Aceasta aserta că propoziţiile care se implică reciproc, care sunt aşadar echivalente, pot fi substituite una cu cealaltă. Vom extinde această Regulă a înlocuirii în următorul fel:

Regula X. *Fie* $\mathfrak{A}(x,y,\ldots,u)$ *şi* $\mathfrak{B}(x,y,\ldots,u)$ *expresii care denotă formule arbitrare şi care conţin variabilele libere* $x,y,\ldots,u$, *dar nu şi altele. Apoi, fie* $\mathfrak{A}(x,y,\ldots,u) \sim \mathfrak{B}(x,y,\ldots,u)$ *o formulă demonstrabilă. Acum, dacă avem o formulă* $\mathfrak{C}$ *în care* $\mathfrak{A}(\ldots)$ *apare ca parte componentă o dată sau de mai multe ori, cu orice variabile în locul variabilelor* $x,y,\ldots u$, *iar* $\mathfrak{D}$ *este o formulă care rezultă din* $\mathfrak{C}$ *prin înlocuirea unora*

sau a tuturor ocurenţelor lui $\mathfrak{A}(\ldots)$ cu $\mathfrak{B}(\ldots)$, în sensul Regulii $\alpha 3$), atunci şi $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$ este o formulă demonstrabilă.

Întrucât avem deja Regula VI, este suficient să arătăm că în ambele laturi ale echivalenţei $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$, cele două expresii $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u)$ şi $\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$ pot fi prefixate cu aceiaşi cuantificatori, astfel încât, de exemplu, se poate scrie:

$$(Ex)(y)\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (Ex)(y)\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u).$$

Este suficient să demonstrăm acest lucru pentru un cuantificator. Vom arăta aşadar că

$$(x)\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (x)\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$$

şi

$$(Ex)\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (Ex)\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$$

sunt demonstrabile.

Din $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$, prin Regula γ') se obţine:

$$(x)(\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)).$$

Folosind apoi Teorema 32 rezultă

$$(x)\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (x)\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u),$$

şi, similar, pe baza Teoremei $34'$ obţinem

$$(Ex)\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (Ex)\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u).$$

Din aceste consideraţii un alt rezultat se poate deriva, respectiv o regulă cu privire la construcţia contradictoriei unei formule.

Regula XI. *Contradictoria unei formule în care abrevierile $\rightarrow$ şi $\sim$ nu apar se construieşte dacă, mai întâi, se înlocuiesc cuantificatorii universali prin cuantificatori existenţiali şi invers, apoi se înlocuiesc reciproc simbolurile & şi $\vee$ şi, în fine, simbolurile propoziţionale şi cele predicative se înlocuiesc cu negaţiile lor.*

Demonstraţia acestei reguli este cea de mai jos.

În cazul în care formula considerată nu conţine niciun cuantificator universal şi existenţial, teorema am demonstrat-o deja mai înainte în calculul propoziţional. Apelând la această teoremă şi înţelegând combinaţia dintre un cuantificator universal şi domeniul lui de acţiune ca un întreg inseparabil, putem întotdeauna izbuti să mutăm negaţia de pe întreaga expresie pe cuantificatorul ei extrem. Dacă în faţa întregii expresii se află un cuantificator, atunci acesta este deja cazul. Acum, din Teorema 33 rezultă că

$$\overline{(x)}\mathfrak{A}(x) \sim (Ex)\overline{\mathfrak{A}}(x),$$
$$\overline{(Ex)}\mathfrak{A}(x) \sim (x)\overline{\mathfrak{A}}(x).$$

Utilizând aceste echivalenţe, negaţia o putem muta de pe cuantificatori pe domeniile lor de acţiune. Cu aceste domenii vom proceda apoi cum am procedat cu întreaga expresie, până când, în final, se ajunge peste tot la simboluri propoziţionale sau la simboluri predicative.

Să clarificăm printr-un exemplu metoda de transformare astfel descrisă. Să presupunem că pentru formula

$$\overline{(x)(Ey)(\overline{F}(x,y) \vee (Ez)G(x,y,z))}$$

vrem să derivăm expresia care corespunde teoremei de mai sus. Mai întâi, din Teorema 33 rezultă că

$$(\overline{(x)}(Ey)(\overline{F}(x,y) \vee (Ez)G(x,y,z)) \sim (Ex)\overline{(Ey)}(\overline{F}(x,y) \vee (Ez)G(x,y,z)),$$

iar apoi, ca expresie echivalentă

$$(Ex)(y)\overline{\overline{F}(x,y) \vee (Ez)G(x,y,z)}.$$

Prin aplicarea cazului special al teoremei noastre pentru calculul propoziţional şi Regula X se obţine:

$$(Ex)(y)(F(x,y)\&\overline{(Ez)}G(x,y,z)$$

şi, în fine:

$$(Ex)(y)(F(x,y)\&(z)\overline{G}(x,y,z)).$$

Această din urmă formulă este exact expresia corespunzătoare regulii noastre.

8. Principiul extins al dualităţii. Formele normale

Din Regula XI a paragrafului precedent se poate deriva un *Principiu al Dualităţii*, pe care-l putem considera ca o extensie a Principiului Dualităţii, demonstrat anterior pentru calculul propoziţional. Formularea sa este următoarea:

Dintr-o formulă demonstrabilă care are forma unei implicaţii sau a unei echivalenţe în ai căror membri simbolurile $\rightarrow$ *şi* $\sim$ *nu apar, rezultă o nouă formulă demonstrabilă dacă peste tot în formulă cuantificatorii universali sunt înlocuiţi cu cei existenţiali (care leagă aceeaşi variabilă) şi invers, şi în plus, simbolurile & şi* $\vee$ *îşi schimbă reciproc locurile. În cazul implicaţiei, în plus, ordinea celor doi membri trebuie schimbată.*

Demonstraţie. Dacă $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ este o formulă demonstrabilă, atunci şi $\overline{\mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}}$ este demonstrabilă, iar dacă $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ este o formulă demonstrabilă, atunci tot astfel este şi $\overline{\mathfrak{A}} \sim \overline{\mathfrak{B}}$. Se transformă acum $\overline{\mathfrak{A}}$ şi $\overline{\mathfrak{B}}$, în acord cu Regula XI a paragrafului precedent. Aşadar, se înlocuiesc reciproc atât cuantificatorii universali şi cei existenţiali, cât şi simbolurile & şi $\vee$, iar simbolurile propoziţionale şi cele predicative se înlocuiesc cu negaţiile lor. Însă, întrucât este vorba despre o formulă demonstrabilă, ultima înlocuire poate fi anulată, dacă în acord cu Regula Substituţiei toate simbolurile propoziţionale şi cele predicative se înlocuiesc cu negaţiile lor.

Principiul extins al dualităţii ne livrează dintr-o lovitură un mare număr de formule universal valide prin transformarea duală a teoremelor demonstrate anterior. Să menţionăm aici pe cele mai importante.[4]

Teorema 26′. $(Ex)(A\&F(x)) \sim A\&(Ex)F(x)$.

Teorema 28′. $(Ex)(A \vee F(x)) \sim A \vee (Ex)F(x)$.

Teorema 29′. $(Ex)(Ey)F(x, y) \sim (Ey)(Ex)F(x, y)$.

Teorema 30′. $(Ex)(F(x) \vee G(x)) \sim (Ex)F(x) \vee (Ex)G(x)$.

Teoremele 29 şi 29′, corelate cu Regula X, ne dau o altă regulă.

[4]Numerotarea teoremelor trebuie să arate din care formule universal valide deja demonstrate teorema respectivă rezultă în acord cu Principiul Dualităţii.

Regula XII. *O formulă este transformată în una echivalentă dacă doi sau mai mulţi cuantificatori universali succesivi, care au acelaşi domeniu de acţiune, sunt rearanjaţi arbitrar. Regula corespunzătoare pentru cuantificatorii existenţiali are de asemenea loc.*

În tratarea calculului propoziţional s-a arătat că este posibil să reducem toate combinaţiile propoziţionale la o formă normală standard. Combinaţiile propoziţionale le-am putut reda fie în forma unor conjuncţii de disjuncţii elementare, fie în forma unor disjuncţii de conjuncţii elementare.

O anumită *formă normală* există însă şi în calculul predicatelor. *Respectiv, orice expresie poate fi înlocuită cu una în care toţi cuantificatorii apar nenegaţi la începutul expresiei, fără a fi separaţi prin paranteze, astfel încât domeniile lor de acţiune se extind toate până la capătul formulei.*[5] Pentru această formă normală numele uzual este cel de "*formă normală prenexă*".

Avantajul acestei reprezentări prin forme normale constă în aceea că expresia de după cuantificatori poate fi tratată exact ca o combinaţie propoziţională. Transformarea în forma normală are loc în următorul fel:

În expresia considerată vom înlocui mai întâi abrevierile $\rightarrow$ şi $\sim$ cu semnificaţiile lor. Prin aplicaţii repetate ale Regulii XI a paragrafului precedent se poate uşor ajunge la o expresie în care bara negaţiei să stea doar deasupra variabilelor propoziţionale şi variabilelor predicative. Acum, redenumim variabilele legate în aşa fel încât toţi cuantificatorii au variabilele aferente distincte. În loc de

$$(x)F(x) \vee (x)G(x)$$

se scrie aşadar

$$(x)F(x) \vee (y)G(y)$$

ş.a.m.d.

[5] Similar calculului propoziţional, acest mod de redare nu este nicidecum unic.

Din expresia logică astfel obţinută forma normală se obţine punând toţi cuantificatorii la începutul formulei, în ordinea în care ei apar în formulă şi lăsând orice altceva neschimbat. Domeniile de acţiune ale tuturor cuantificatorilor se extind astfel până la capătul formulei.

Faptul că această ultimă transformare este efectiv admisibilă se stabileşte în următorul mod. Fie validitatea acestei transformări deja arătată în cazul în care expresia considerată are mai puţini cuantificatori. Dacă nu apare niciun cuantificator, atunci aserţiunea nu spune nimic special. Acum, dacă întreaga expresie este domeniul de acţiune al unui cuantificator, atunci aserţiunea este clară. Va trebui atunci să facem transformarea doar pentru domeniul de acţiune al acestui cuantificator, care conţine el însuşi mai puţini cuantificatori. În caz contrar, vom lua primul cuantificator al expresiei noastre. Acesta nu se află el însuşi în domeniul de acţiune al unui alt cuantificator. Prin aplicarea teoremelor:

$$A \vee (x)F(x) \sim (x)(A \vee F(x)),$$

$$(x)F(x) \vee A \sim (x)(F(x) \vee A),$$

$$A\&(x)F(x) \sim (x)(A\&F(x)),$$

$$(x)F(x)\&A \sim (x)(F(x)\&A),$$

respectiv a teoremelor corespunzătoare pentru cuantificatorul existenţial, putem muta acest cuantificator la începutul formulei iar domeniul lui de acţiune îl putem extinde peste întreaga formulă. Cu aceasta ne întoarcem la cazul precedent, iar prin aceasta validitatea transformării este demonstrată în general.

Forma normală prenexă oferă avantajul că în cercetările generale din calculul predicatelor stocul formulelor care trebuie luate în considerare poate fi restrâns în mod esenţial. Cu toate acestea, posibilităţile de configurare ale combinaţiilor de cuantificatori universali şi existenţiali, care stau în faţa formulei, combinaţii pe care le vom numi "*prefixul*" formulei, este încă derutant de cuprinzător. În această privinţă, un rezultat

al lui T. Skolem[6] prezintă interes, fiindcă el reprezintă o anume întărire a teoremei privitoare la forma normală prenexă. Această teoremă a lui Skolem asertează (în formularea pe care o utilizăm aici) următoarele:

Pentru orice formulă a calculului predicatelor se poate construi o altă formulă, care nu este doar în forma normală prenexă, ci în care toţi cuantificatorii existenţiali preced toţi cuantificatorii universali şi care este astfel constituită încât fie ambele formule sunt demonstrabile, fie niciuna nu este demonstrabilă în sistemul nostru axiomatic de calcul al predicatelor.

În cele ce urmează o formulă aflată în forma normală prenexă, în care niciun cuantificator existenţial nu succede vreunui cuantificator universal, o vom numi o formulă în forma normală Skolem. În demonstraţia acestei teoreme trebuie să luăm în consideraţie doar formulele aflate în forma normală prenexă. Apoi, putem presupune că formula nu conţine nicio variabilă individuală liberă. Căci dacă ar trebui să apară astfel de variabile, atunci [prin Axioma e) şi Regula γ')] este suficient să considerăm formula care rezultă din formula dată prin adăugarea cuantificatorilor universali corespunzători variabilelor individuale libere şi prin plasarea lor la începutul formulei. Prin gradul unei formule de acest gen vom înţelege numărul cuantificatorilor universali după care urmează cel puţin un cuantificator existenţial. Atunci este suficient să arătăm că pentru orice formulă în forma normală prenexă dar care nu se află în forma normală Skolem se poate găsi o formulă de un grad mai mic şi care este demonstrabilă dacă şi numai dacă formula precedentă este demonstrabilă. Mai putem presupune că prefixul formulei considerate începe cu un cuantificator existenţial. Căci în cazul în care formula, pe care o denotăm cu $\mathfrak{A}$, începe cu un cuantificator universal, atunci vom lua o variabilă individuală care nu apare în $\mathfrak{A}$, să zicem u, şi similar o variabilă predicativă, ză zicem G, şi înlocuim $\mathfrak{A}$ cu formula

[6]T. Skolem, *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen*, Vid. Skrifter I, Mat.-nat. Klasse, 1920, Nr. 4.

$$(Eu)(\mathfrak{A}\&G(u) \vee \overline{G}(u)),$$

care, este uşor de văzut, sub aspectul demonstrabilităţii, are acelaşi statut ca $\mathfrak{A}$, întrucât în domeniul de acţiune al (Eu) am adăugat lui $\mathfrak{A}$, ca membru al conjuncţiei, o formulă logic adevărată. Formula $(Eu)(\mathfrak{A}\&G(u) \vee \overline{G}(u))$ poate fi apoi adusă la forma normală prenexă, astfel încât prefixul începe cu un cuantificator existenţial.

Formula noastră începe aşadar cu n (≥ 1) cuantificatori existenţiali, urmaţi de cel puţin un cuantificator universal. Prin urmare, ea are forma

$$\text{(I)} \qquad (Ex_1)\ldots(Ex_n)(y)\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y).$$

$\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ este aici o formulă în forma normală prenexă, care conţine ca variabile individuale libere doar $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$. Fie H o variabilă predicativă cu $n+1$ locuri pentru argumente, variabilă care nu apare în $\mathfrak{B}$.

Construim formula

$$\text{(II)} \qquad (Ex_1)\ldots(Ex_n)[(Ey)(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)\&\overline{H}(x_1, \ldots, x_n, y))$$

$$\vee(z)H(x_1, \ldots, x_n, z)].$$

Această formulă se poate demonstra, în cazul în care (I) este demonstrabilă, şi invers.

Respectiv, dacă în (II), prin Regula $\alpha 3$), vom înlocui H cu $\mathfrak{B}$, atunci vom obţine

$$(Ex_1)\ldots(Ex_n)[(Ey)(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)\&\overline{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n, y))$$

$$\vee(z)\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, z)].$$

Atunci partea de formulă care reprezintă o propoziţie falsă poate fi omisă, respectiv

$$(Ey)(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)\&\overline{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Ceva mai complicată este derivarea lui (II) din (I). Mai întâi, din Teorema 31, prin redenumirea variabilelor legate, obţinem

$$(y)(F(y) \to G(y)) \to ((y)F(y) \to (y)G(y)).$$

Acum, în acord cu regulile calculului propoziţional (Regula VII)

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$$

se poate transforma în

$$\mathfrak{B} \to (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{C}).$$

Procedând astfel obţinem

$$(y)F(y) \to (Ey)(F(y)\&\overline{G}(y)) \vee (y)G(y),$$

în cazul în care în afara regulii cu privire la construcţia contradictoriei unei formule se are în vedere şi faptul că $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ este o abreviere pentru $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$. În această formulă $F(y)$ se înlocuieşte cu $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$ iar $G(y)$ cu $H(x_1, \ldots, x_n, y)$, şi se obţine

$$(y)\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \to (Ey)(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)\&\overline{H}(x_1, \ldots, x_n, y))$$
$$\vee (y)H(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Prin aplicaţii repetate ale regulii de la finele demonstraţiei pentru Teorema 34 rezultă apoi

$$(Ex_1) \ldots (Ex_n)(y)\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$$
$$\to (Ex_1) \ldots (Ex_n)[(Ey)(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$$
$$\&\overline{H}(x_1, \ldots, x_n, y)) \vee (y)H(x_1, \ldots, x_n, y)].$$

Dacă avem în vedere că, prin ipoteză, (I) este deja demonstrată, atunci Regula Detaşării şi Regula redenumirii variabilelor legate δ) generează formula (II).

Acum aducem formula (II) la forma normală prenexă. Iar acest lucru îl putem face astfel că prefixul începe cu $(Ex_1) \ldots (Ex_n)(Ey)$, continuă cu cuantificatorii universali şi existenţiali din $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$ într-o ordine neschimbată şi se termină cu cuantificatorul universal (z). Întrucât gradul

formulei obţinute este cu unu mai mic decât gradul lui (I), teorema despre forma normală Skolem este astfel demonstrată.

[Teorema lui Skolem este valabilă şi în forma ei semantică, i.e., pentru orice formulă $\mathfrak{A}$ a calculului predicatelor se poate găsi o formulă $\mathfrak{B}$ în forma normală Skolem, astfel încât $\mathfrak{A}$ este validă ddacă $\mathfrak{B}$ este validă (i.e., fie ambele sunt valide, fie niciuna nu-i validă). Demonstrarea acestei forme se bazează pe demonstrarea corectitudinii sistemului formal considerat (i.e., pe demonstraţia faptului că toate axiomele sistemului sunt formule valide iar regulile de deducţie conservă în concluzie validitatea premisei (premiselor) şi pe demonstraţia formei iniţiale (sintactice) a Teoremei lui Skolem (i.e., în această demonstraţie conceptul "... este demonstrabilă" este înlocuit peste tot cu conceptul "... este validă").]

9. Consistenţa şi independenţa sistemului de axiome

Metoda interpretării aritmetice, cu ajutorul căreia mai înainte s-a putut constata consistenţa şi independenţa Axiomelor a)-d), ne permite acum să recunoaştem şi că întregul sistem de *axiome ale calculului predicatelor este consistent*, în sensul explicat mai sus. Pentru aceasta, interpretarea aritmetică valabilă doar pentru variabilele propoziţionale trebuie extinsă la simbolurile încă neinterpretate până acum. Iar acest lucru are loc în felul următor:

Simbolurile predicative le vom trata în acelaşi fel ca simbolurile propoziţionale. Pe ambele le vom considera ca variabile aritmetice care pot lua valorile 0 şi 1 şi nu altele. Modul în care, la simbolurile predicative, locurile pentru argumente sunt umplute, nu va fi luat în considerare aici. Cuantificatorii sunt omişi peste tot. Conectorul $\vee$ va fi din nou înţeles ca produs aritmetic, prin $\overline{0}$ vom înţelege 1 iar prin $\overline{1}$ vom înţelege 0.

Cu aceste convenţii vom vedea din nou, mai întâi, că toate axiomele, inclusiv e) şi f), dau întotdeauna valoarea 0 în această interpretare aritmetică. Apoi, dacă una sau mai multe formule au întotdeauna valoarea 0, atunci, cum uşor ne putem convinge, şi orice altă formulă, derivată din

acestea în acord cu regulile noastre, dă întotdeauna valoarea 0. Întrucât, pe de altă parte, două expresii din care una este negaţia celeilalte nu pot da amândouă întotdeauna valoarea 0, rezultă că dintre formulele care se pot deriva din axiomele noastre nu pot exista două formule în care una o contrazice pe cealaltă. Condiţia consistenţei este aşadar satisfăcută.

De altfel, rezultatul acestei demonstraţii de consistenţă a axiomelor noastre nu trebuie supraestimat în semnificaţia sa. Căci demonstraţia dată a consistenţei este intuitiv totuna cu a spune că se presupune că domeniul de indivizi care stă la bază ar consta doar dintr-un singur element, ar fi aşadar finit. În acest fel n-avem nicio garanţie că prin introducerea formală de postulate intuitiv ireproşabile sistemul formulelor demonstrabile rămâne consistent. De exemplu, rămâne fără răspuns întrebarea dacă nu cumva prin adăugarea de axiome matematice calculului nostru orice formulă arbitrară devine demonstrabilă. Această problemă a cărei soluţie are o semnificaţie centrală pentru matematică nu se poate nicidecum compara sub aspectul dificultăţii cu întrebarea pe care o tratăm aici. Axiomele matematice presupun de facto un domeniu infinit de indivizi, iar de conceptul infinitului sunt legate anumite dificultăţi şi paradoxuri care în discuţia despre fundamentele matematicii joacă un anume rol. Pentru a ataca cu succes această din urmă problemă Hilbert s-a văzut provocat în vederea elaborării unei teorii speciale. În limitele acestei cărţi nu este posibil să intrăm în această teorie care, fireşte, utilizează rezultatele logicii matematice. Pentru aceasta trimitem o dată pentru totdeauna la cartea lui Hilbert şi Bernays.[7]

Să ne întoarcem acum la sistemul nostru de axiome. Acum vom demonstra *independenţa sistemului de axiome*, arătând că niciuna din Axiomele a)-f), respectiv niciuna din Regulile $\alpha 1$)-$\alpha 3$), β), γ), δ) nu este dispensabilă pentru obţinerea formulelor universal valide ale calculului

[7] D. Hilbert şi P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I, II, Berlin, 1934, 1939.

predicatelor.[8] În demonstraţiile de independenţă care urmează este utilizată consistenţa calculului, tocmai demonstrată.

Vom arăta mai întâi că niciuna din Axiomele a)-d) nu este inutilă, şi deci că nu este posibil să obţinem vreuna din aceste axiome din celelalte axiome cu ajutorul regulilor de deducţie. Pentru aceasta vom utiliza faptul demonstrat anterior (Cap. 1, §13), potrivit căruia în calculul propoziţional pur niciuna din aceste axiome nu este dispensabilă; şi anume nici chiar atunci când $X \to X$, i.e., $\overline{X} \vee X$ este adăugată ca o altă axiomă.

Presupunem că ar exista o demonstraţie pentru vreuna din Axiomele a)-d) cu ajutorul restului axiomelor şi al regulilor de deducţie ale calculului predicatelor. Atunci vom îndepărta variabilele predicative şi cele individuale din formulele acestei demonstraţii, în următorul mod. Cuantificatorii universali şi cei existenţiali sunt omişi. Fiecare variabilă predicativă cu argumente este înlocuită cu variabila propoziţională X. Prin această transformare Axiomele e) şi f) devin formula $X \to X$.

Mai mult, demonstraţia îşi păstrează caracterul de demonstraţie. O substituţie în acord cu Regulile $\alpha 1$)-$\alpha 3$) devine o substituţie a calculului propoziţional, respectiv o simplă repetare. Conectarea formulelor prin Regula detaşării se păstrează. Regula γ) şi Regula δ) a redenumirii variabilelor legate devin o simplă repetare. Şi astfel formula la care ne referim ar fi derivabilă din restul axiomelor şirului a)-d) şi din $X \to X$, în acord cu regulile calculului propoziţional, în contradicţie cu rezultatele obţinute anterior.

[8] O demonstraţie a independenţei a fost între timp (i.e., de la apariţia primei ediţii) dată de McKinsey. Comp. J.C.C. McKinsey, *On the independence of Hilbert and Ackermann's postulates for the calculus of propositional functions*, Amer. J. Math. Vol. 58. Demonstraţii mai simple (nepublicate până acum) ne-au fost comunicate de P. Bernays şi Arnold Schmidt. Textul reproduce expunerea de idei a lui Bernays.

Independenţa Axiomei e) o arătăm demonstrând că toate formulele care se pot demonstra fără utilizarea acestei axiome au o proprietate caracteristică care lipseşte acestei axiome. Respectiv, dacă schimbăm formulele, începând cu cel mai interior domeniu de acţiune, înlocuind fiecare parte $(x)\mathfrak{A}(x)$, $(y)\mathfrak{A}(y)$ etc. cu $(x)\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \overline{X}$, $(y)\mathfrak{A}(y) \vee X \vee \overline{X}$ etc., atunci fiecare formulă care se poate obţine fără utilizarea Axiomei e) se transformă într-o formulă demonstrabilă în calculul predicatelor. Căci transformarea menţionată nu afectează Axiomele a)-d) şi f). Conectarea formulelor prin Regula Substituţiei α), prin Regula detaşării, prin Regula $\gamma 2$) şi prin Regula redenumirii δ) se păstrează. În Regula $\gamma 1$), formula finală $\mathfrak{A} \to (x)\mathfrak{B}(x)$ este transformată într-o formulă de forma $\mathfrak{A}' \to (x)\mathfrak{B}'(x) \vee X \vee \overline{X}$, aşadar într-o formulă demonstrabilă. Dimpotrivă,

$$(x)F(x) \to F(y) \text{ devine } (x)F(x) \vee X \vee \overline{X} \to F(y),$$

care, desigur, nu este demonstrabilă, deoarece din adevărul antecedentului implicaţiei rezultă $F(y)$ iar apoi, prin substituţie în acord cu Regula $\alpha 3$), am deriva $\overline{F}(y)$; am obţine aşadar o contradicţie.

Independenţa Axiomei f)[9] se arată într-un mod cu totul similar. În loc să înlocuim în formule părţile de formulă $(x)\mathfrak{A}(x)$ cu $(x)\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \overline{X}$, vom înlocui $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ cu $(Ex)\mathfrak{A}(x) \& X \& \overline{X}$. În rest argumentul este similar.

Prin aceeaşi metodă se arată şi independenţa celor două Reguli $\gamma 1$) şi $\gamma 2$). Dacă de data aceasta înlocuim în formule $(x)\mathfrak{A}(x)$ cu $(x)\mathfrak{A}(x) \& X \& \overline{X}$, atunci toate formulele care pot fi derivate în calculul predicatelor fără utilizarea Regulii $\gamma 1$) se transformă din nou în formule demonstrabile. Dimpotrivă, formula $(x)(F(x) \vee \overline{F}(x))$, demonstrabilă din întregul sistem axiomatic, se transformă în formula în mod cert nedemonstrabilă $(x)(F(x) \vee \overline{F}(x)) \& X \& \overline{X}$. De aici rezultă indispensabilitatea Regulii $\gamma 1$). Similar, înlocuirea în formule a $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ cu $(Ex)\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \overline{X}$

[9] Faptul că cuantificatorul existenţial este în principiu dispensabil în sistemul axiomatic n-are, evident, nimic de-a face cu independenţa Axiomei f), întrucât $(Ex)\mathfrak{A}(x)$, la urma urmei, poate fi considerat ca o abreviere pentru $\overline{(x)}\ \overline{\mathfrak{A}}(x)$ (cf. §2).

stabileşte independenţa Regulii $\gamma 2$), întrucât prin această înlocuire formula $\overline{(Ex)}(F(x)\&\overline{F}(x))$ devine o formulă nedemonstrabilă.

Independenţa Regulii $\alpha 1$) rezultă din faptul că fără această regulă sunt demonstrabile doar acele formule în care apar variabile individuale care au una din următoarele forme:

$$(x)\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(y); \quad \mathfrak{A}(y) \rightarrow (Ex)\mathfrak{A}(x);$$
$$(x)\mathfrak{A}(x) \rightarrow (x)\mathfrak{A}(x); \quad (Ex)\mathfrak{A}(x) \rightarrow (Ex)\mathfrak{A}(x);$$
$$(Ez)((x)\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(z)); \quad (Ez)(\mathfrak{A}(z) \rightarrow (Ex)\mathfrak{A}(x)),$$

sau care rezultă din astfel de formule prin substituţia variabilelor individuale sau prin redenumirea variabilelor legate. Căci Axiomele e) şi f) au această formă iar prin regulile de deducţie se obţin întotdeauna doar formule de acest gen. Şi astfel, de exemplu, formula $(x)F(x) \rightarrow (Ex)F(x)$ nu este demonstrabilă fără utilizarea Regulii $\alpha 1$).

Independenţa Regulii $\alpha 2$) se stabileşte prin următoarea transformare. În toate formulele vor fi omise locurile pentru argumente ale variabilelor predicative care sunt ocupate de variabila individuală liberă z. De exemplu, formula $F(x, z)$ devine $F(x)$ iar $G(z)$ devine G. Prin această transformare, orice demonstraţie executată fără utilizarea Regulii substituţiei pentru variabile individuale trece, din nou, într-o demonstraţie. Întrucât axiomele nu sunt alterate de transformare, orice formulă demonstrabilă fără utilizarea Regulii $\alpha 2$), prin această transformare devine, din nou, o formulă demonstrabilă. Însă, prin această transformare formula demonstrabilă $(x)F(x) \rightarrow F(z)$ devine formula în mod cert nedemonstrabilă $(x)F(x) \rightarrow F$ (aici al doilea F este o variabilă propoziţională).

Independenţa Regulii redenumirii δ) se poate argumenta într-un mod similar. În formule vom face aceeaşi transformare pe care am executat-o cu referire la variabila individuală liberă z, numai că de data aceasta o vom face cu referire la variabila individuală legată z. Trebuie atunci omise şi simbolurile (z) şi (Ez). Şi în acest caz o formulă care este demonstrabilă fără utilizarea Regulii redenumirii trece, din nou, într-o formulă demonstrabilă. Dimpotrivă, formula sigur demonstrabilă $(z)F(z) \rightarrow F(x)$ devine formula în mod cert nedemonstrabilă $F \rightarrow F(x)$.

Pentru a stabili independenţa Regulii $\alpha 3$), vom înlocui în formule orice formulă parţială $(x)\mathfrak{A}(x)$, $(y)\mathfrak{A}(y)$ etc., care conţine variabila predicativă G, cu $(x)\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \overline{X}$, $(y)\mathfrak{A}(y) \vee X \vee \overline{X}$ etc. Atunci, orice formulă, demonstrabilă fără utilizarea Regulii $\alpha 3$), devine, din nou, o formulă demonstrabilă. Dimpotrivă, acest lucru nu are loc pentru formula $(x)G(x) \to G(y)$.

Indispensabilitatea Regulii detaşării rezultă din faptul că fără această regulă pot fi derivate doar formule de forma $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$, deoarece toate axiomele au această formă iar regulile, cu excepţia Regulii β), livrează, din nou, doar formule de acest gen. De exemplu, fără utilizarea Regulii β) formula $X \vee \overline{X}$ nu poate fi derivată.

10. Completitudinea sistemului axiomatic

Aşa cum am remarcat în Capitolul 1 (§13), completitudinea unui sistem axiomatic se poate defini în două feluri. Completitudinea în sensul mai tare al cuvântului are loc atunci când prin adăugarea unei formule nedemonstrabile anterior axiomelor sistemului rezultă întotdeauna o contradicţie. Acest gen de completitudine nu are loc aici. Pentru a stabili incompletitudinea sistemului axiomatic trebuie doar să găsim o formulă care în interpretarea aritmetică, pe care am utilizat-o în demonstrarea consistenţei, este identic 0, însă nu este o consecinţă a axiomelor. O astfel de formulă este

$$(Ex)F(x) \to (x)F(x).$$

Faptul că această formulă nu rezultă din axiome poate fi făcut plauzibil deja prin aceea că aserţiunea pe care o exprimă: ”Dacă există un x pentru care $F(x)$ are loc, atunci $F(x)$ are loc pentru toţi x”, nu este una universal validă, respectiv, ea nu mai este adevărată pentru predicate arbitrare F, dacă domeniul de indivizi conţine mai mult decât un element.

Demonstraţia strict formală a imposibilităţii de a demonstra formula din axiome are loc în următorul fel:

Vom da mai întâi o metodă prin care transformăm formulele logice în formule care conţin doar variabile propoziţionale. Înainte de toate, îndepărtăm variabilele libere care apar într-o formulă, punând în faţa formulei cuantificatorii universali care aparţin acestor variabile libere. Apoi, începând din afară, îndepărtăm cuantificatorii înlocuind întotdeauna

$$(x)\mathfrak{A}(x) \text{ cu } \mathfrak{A}(1)\&\mathfrak{A}(2),$$

$$(Ex)\mathfrak{A}(x) \text{ cu } \mathfrak{A}(1) \vee \mathfrak{A}(2).$$[10]

Pe lângă variabilele propoziţionale, în formulele noastre apar acum şi propoziţii de forma $F(1), F(2), G(1,2), \ldots$.

Toate aceste propoziţii diferite le înlocuim apoi cu variabile propoziţionale (diferite).

Asertăm acum că prin această transformare orice formulă demonstrabilă din axiome trece într-o combinaţie propoziţională logic adevărată.

Vom arăta acest lucru mai întâi pentru axiome. Pentru Axiomele a)-d) acest lucru este clar, deoarece ele rămân neafectate de această transformare. Axioma $(x)F(x) \to F(y)$ este transformată astfel:

$$(y)((x)F(x) \to F(y)),$$

$$((x)F(x) \to F(1))\&((x)F(x) \to F(2)),$$

$$(F(1)\&F(2) \to F(1))\&(F(1)\&F(2) \to F(2)),$$

$$(A\&B \to A)\&(A\&B) \to B.$$

Ultima formulă este într-adevăr o combinaţie propoziţională logic adevărată.

Analog, pentru axioma

$$F(y) \to (Ex)F(x)$$

avem următoarele transformări:

$$(y)(F(y) \to (Ex)F(x)),$$

[10]Aici 1 şi 2 sunt nume proprii de obiecte. Intuitiv, soluţia noastră cu privire la eliminarea cuantificatorilor înseamnă aşadar că noi presupunem că domeniul de indivizi conţine doar cele două elemente, 1 şi 2.

$$(F(1) \to (Ex)F(x))\&(F(2) \to (Ex)F(x)),$$
$$(F(1) \to F(1) \vee F(2))\&(F(2) \to F(1) \vee F(2)),$$
$$(A \to A \vee B)\&(B \to A \vee B),$$

care, similar, duce la o formulă logic adevărată. Va mai trebui acum să arătăm doar că aplicarea Regulilor α), β), γ), δ) lasă această proprietate neschimbată.

Dacă avem două formule, din care cea de-a doua rezultă din prima prin aplicarea Regulilor $\alpha1$) sau $\alpha3$), atunci, după transformare, fie cele două formule sunt conectate prin Regula Substituţiei a calculului propoziţional, fie cea de-a doua formulă este o conjuncţie de formule în care fiecare rezultă din prima prin Regula Substituţiei a calculului propoziţional. Regulile $\alpha2$) şi δ) devin simple repetiţii. Regula detaşării îşi păstrează forma, în cazul în care în formule nu apar variabile individuale libere. Dacă Regula detaşării conţine încă variabile individuale libere, atunci, fireşte, după prefixarea cu cuantificatori universali ea îşi poate pierde forma. De exemplu, regula

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(x)\\ \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)\end{array}}{\mathfrak{B}(x)}$$

devine o nouă regulă, respectiv

$$\frac{\begin{array}{c}(x)\mathfrak{A}(x)\\ (x)(\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x))\end{array}}{(x)\mathfrak{B}(x)}$$

Prin eliminarea cuantificatorilor universali se obţine

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(1)\&\mathfrak{A}(2)\\ (\mathfrak{A}(1) \to \mathfrak{B}(1))\&(\mathfrak{A}(2) \to \mathfrak{B}(2))\end{array}}{\mathfrak{B}(1)\&\mathfrak{B}(2)}$$

Însă şi această regulă corespunde regulilor calculului propoziţional. La fel stau lucrurile în cazul în care apar mai multe variabile individuale libere.

În fine, ajungem la γ). O expresie

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(x),$$

prin transformare (în cazul în care $\mathfrak{A}$ nu conţine nicio variabilă liberă), trece în

$$(x)(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(x)),$$

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(1) \& \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(2))$$

etc. $\mathfrak{A} \to (x)\mathfrak{B}(x)$ se transformă în:

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B}(1) \& \mathfrak{B}(2)).$$

Însă în acord cu regulile calculului propoziţional, cele două formule sunt echivalente. La fel stau lucrurile dacă $\mathfrak{A}$ conţine variabile libere. Consideraţii similare sunt valabile pentru Regula γ) privitoare la adăugarea unui cuantificator existenţial.

Cu aceasta am arătat efectiv că prin transformările noastre orice formulă demonstrabilă din axiome trece într-o combinaţie propoziţională logic adevărată.

Acum

$$(Ex)F(x) \to (x)F(x)$$

nu are această proprietate, pentru că prin transformare ea devine

$$F(1) \vee F(2) \to F(1) \& F(2)$$

$$A \vee B \to A \& B,$$

iar aceasta nu este o formulă propoziţională logic adevărată.

După ce am arătat că sistemul axiomatic nu este complet în sensul mai tare al cuvântului, ne întrebăm dacă completitudinea are loc aici în celălalt sens, menţionat de asemenea mai sus (Cap. 1, §13). Problema acum este dacă din sistemul axiomatic pot fi derivate toate formulele universal valide ale calculului predicatelor, aşa cum au fost ele definite

la începutul §5 al acestui capitol. Completitudinea în acest sens are realmente loc. Demonstraţia a fost dată de K. Gödel, a cărui expunere o vom urma mai jos.[11]

[În acord cu cele expuse la finele §8, pentru orice formulă a calculului predicatelor putem găsi o formulă în forma normală Skolem astfel încât ambele formule sunt universal valide sau niciuna nu este universal validă.]

Ne putem aşadar limita la a arăta că toate formulele universal valide, aflate în forma normală Skolem, sunt demonstrabile.

Fie

$$(Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;y_1,\dots,y_l)$$

o astfel de formulă.

Remarcăm mai întâi faptul că toţi k-tuplii $(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k})$, formaţi din şirul infinit al variabilelor individuale $x_0,x_1,x_2,\dots$, se pot enumera, ordonându-i, în modul standard, după sumele crescătoare ale indecşilor $(i_1+i_2+\dots+i_k)$, iar pentru sume egale lexicografic. Şirul începe aşadar cu $(x_0,x_0,\dots,x_0)$; $(x_0,x_0,\dots,x_1)$; $(x_0,x_0,\dots,x_1,x_0),\dots$. Fie $(x_{n_1},x_{n_2},\dots,x_{n_k})$ cel de-al n-lea dintre aceşti k-tupli. Apoi, prin $\mathfrak{B}_n$ vom înţelege formula

$$\mathfrak{A}(x_{n_1},x_{n_2},\dots,x_{n_k};x_{(n-1)l+1},x_{(n-1)l+2},\dots,x_{n_l}).$$

Să remarcăm aici faptul că în această formulă variabilele individuale care se află după punct şi virgulă sunt diferite atât de cele care stau înaintea acestui simbol cât şi de toate variabilele care apar într-o formulă $\mathfrak{B}_p$ $(p<n)$. Variabilele $x_{n_1},\dots,x_{n_k}$, dimpotrivă, apar toate deja în formulele $\mathfrak{B}_p$ $(p<n)$. Apoi, prin $\mathfrak{C}_n$ vom înţelege disjuncţia $\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2\vee\dots\vee\mathfrak{B}_n$, prin $\mathfrak{D}_n$ formula care rezultă din $\mathfrak{C}_n$ prefixând $\mathfrak{C}_n$ cu toţi cuantificatorii universali care aparţin variabilelor individuale libere. Fiecărei formule $\mathfrak{C}_n$ îi asociem acum o formulă a calculului propoziţional. Respectiv, componentele elementare ale acestei formule

[11] K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Mh. Math. Physik, vol. 37(1930).

care, abstracţie făcând de variabilele propoziţionale, sunt variabile predicative cu variabile individuale drept argumente, se înlocuiesc cu variabile propoziţionale; şi anume în aşa fel încât pentru aceleaşi componente elementare se pun aceleaşi variabile propoziţionale iar pentru componente elementare diferite se pun variabile propoziţionale diferite. Formula propoziţională astfel asociată formulei $\mathfrak{C}_n$ o vom numi $\mathfrak{E}_n$. Evident, $\mathfrak{E}_n$ este astfel construită încât $\mathfrak{C}_n$ poate fi obţinută din $\mathfrak{E}_n$ prin Regula Substituţiei $\alpha 1$).

Avem acum următoarele alternative:

1. Există un n astfel încât $\mathfrak{E}_n$ este o formulă logic adevărată a calculului propoziţional.

2. Nu există niciun n astfel încât $\mathfrak{E}_n$ este o formulă logic adevărată a calculului propoziţional.

Vom demonstra următoarele:

(A) În cazul 1, formula

$$(Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;y_1,\dots,y_l)$$

este demonstrabilă în sistemul axiomatic al calculului predicatelor.

(B) În cazul 2, formula de mai sus nu este o formulă universal validă, deoarece în domeniul de indivizi al numerelor naturale se pot găsi predicate care, substituite pentru variabilele predicative ale formulei, transformă formula într-o propoziţie falsă.

Din aceste propoziţii, care încă rămân să fie demonstrate, rezultă drept concluzii următoarele:

Orice formulă universal validă a calculului predicatelor este demonstrabilă; i.e., sistemul nostru axiomatic care constă din formulele primitive a)-f) şi din regulile $\alpha 1$)-$\alpha 3$), β), γ), δ) *posedă proprietatea completitudinii.*

Dacă o formulă este universal validă în domeniul de indivizi al numerelor naturale (sau în orice alt domeniu infinit numărabil de indivizi), i.e., prin înlocuirea arbitrară a variabilelor predicative prin predicate numerice individuale şi a variabilelor individuale libere prin numere definite, formula trece întotdeauna într-o propoziţie adevărată, atunci ea este

validă în orice domeniu de indivizi, i.e., o formulă identică.

Ultima teoremă importantă, care aici rezultă drept corolar, se poate obţine mai simplu ca rezultat independent şi a fost demonstrată pentru prima dată de L. Löwenheim.[12]

Acum trebuie să demonstrăm aserţiunile (A) şi (B). Mai întâi vom arăta adevărul lui (A). Pentru un n arbitrar, fie $\mathfrak{E}_n$ o formulă propoziţională logic adevărată. Întrucât $\mathfrak{C}_n$ se obţine din $\mathfrak{E}_n$ prin substituţie în acord cu Regula $\alpha 1$) şi, mai mult, $\mathfrak{D}_n$ din $\mathfrak{C}_n$ prin aplicarea Regulii γ), este suficient să se arate că pentru orice n

$$\mathfrak{D}_n \to (Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;y_1,\dots,y_l)$$

este o formulă demonstrabilă a calculului predicatelor. Vom arăta acest lucru prin inducţie pe n.* $\mathfrak{D}_1$ are forma

$$(x_0)(x_1)\dots(x_l)\mathfrak{A}(x_0,\dots,x_0;x_1,\dots,x_l).$$

Apoi, prin aplicaţii repetate ale Axiomei f) şi ale Regulii V, următoarea formulă este demonstrabilă:

$$(y_1)\dots(y_l)\mathfrak{A}(z_1,\dots,z_k;y_1,\dots,y_l) \to \\ (Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;y_1,\dots,y_l).$$

De unde, prin substituţia z_0 pentru z_i se obţine

$$(y_1)\dots(y_l)\mathfrak{A}(z_0,\dots,z_0;y_1,\dots,y_l) \to \\ (Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;y_1,\dots,y_l).$$

---

[12]L. Löwenheim, *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, Math. Ann. Vol. 76 (1915). O simplificare esenţială a metodei de demonstraţie este conţinută în lucrarea lui Skolem, menţionată la finele §8 al acestui capitol.

*Demonstraţia care urmează înlocuieşte parţial demonstraţia părţii (A) a teoremei completitudinii din textul original al autorilor germani, în acord cu menţiunile făcute de A. Church [1944] (comp. Introducere, p. xx, notele 44, 45).

Apoi, prin Axioma e) următoarea implicaţie are loc

$$(x_0)(x_1)\dots(x_l)\mathfrak{A}(x_0,\dots,x_0;x_1,\dots,x_l)\rightarrow \\ (x_1)\dots(x_l)\mathfrak{A}(z_0,\dots,z_0;x_1,\dots,x_l).$$

Să notăm faptul că antecedentul acestei implicaţii este tocmai $\mathfrak{D}_1$. Apoi, prin Regula δ) următoarea implicaţie are de asemenea loc:

$$(x_1)\dots(x_l)\mathfrak{A}(z_0,\dots,z_0;x_1,\dots,x_l)\rightarrow \\ (y_1)\dots(y_l)\mathfrak{A}(z_0,\dots,z_0;y_1,\dots,y_l).$$

Din ultimele trei implicaţii, prin Regula V, obţinem

$$\mathfrak{D}_1\rightarrow(Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;y_1,\dots,y_l).$$

Iar aceasta este tocmai baza inducţiei.

Acum, următoarea implicaţie o presupunem (ca ipoteză a inducţiei):

$$\mathfrak{D}_{n-1}\rightarrow(Ex_1)\dots(Ex_k)(y_1)\dots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_k;y_1,\dots,y_l).$$

Prin definiţie, $\mathfrak{D}_n$ are următoarea formă

$$(x_0)(x_1)\dots(x_{nl})\mathfrak{C}_\mathfrak{n};\ \text{i.e.,}\ (x_0)\dots(x_{nl})(\mathfrak{C}_{n-1}\vee\mathfrak{B}_n),$$

sau, mai exact

$$(x_0)(x_1)\dots(x_{nl})(\mathfrak{C}_{n-1}\vee\mathfrak{A}(x_{n_1},\dots,x_{n_k};x_{(n-1)l+1},\dots,x_{nl})),$$

unde al doilea disjunct din paranteză este, prin definiţie, $\mathfrak{B}_n$.

Aşa cum am văzut mai sus, prin construcţia formulelor $\mathfrak{B}_n$, variabilele de după punct şi virgulă, i.e., $(x_{(n-1)l+1},\dots,x_{nl}$, nu apar în $\mathfrak{C}_{n-1}$. Şi deci, prin Teorema 26 următoarea echivalenţă are loc

$$(x_{(n-1)l+1})\dots(x_{nl})(\mathfrak{C}_{n-1}\vee\mathfrak{B}_n)\sim\mathfrak{C}_{n-1}\vee(x_{(n-1)l+1})\dots(x_{nl})\mathfrak{B}_n.$$

Acum, prin calculul propoziţional, dacă echivalenţa este o teoremă, atunci sunt teoreme ambele implicaţii a căror conjuncţie formează echivalenţa. Este, aşadar, teoremă şi următoarea implicaţie

$$(x_{(n-1)l+1})\dots(x_{nl})(\mathfrak{C}_{n-1}\vee\mathfrak{B}_n)\rightarrow\mathfrak{C}_{n-1}\vee(x_{(n-1)l+1})\dots(x_{nl})\mathfrak{B}_n.$$

Dacă, prin Regula γ'), în faţa acestei implicaţii vom introduce toţi cuantificatorii pentru restul variabilelor, i.e., $x_0, x_1, \ldots, x_{(n-1)l}$, vom obţine

$$(x_0)\ldots(x_{(n-1)l})[(x_{(n-1)l+1})\ldots(x_{nl})(\mathfrak{C}_{n-1} \vee \mathfrak{B}_n) \to \mathfrak{C}_{n-1} \vee (x_{(n-1)l+1})\ldots(x_{nl})\mathfrak{B}_n],$$

din care, prin Teorema 31, obţinem

$$(x_0)\ldots(x_{(n-1)l})(x_{(n-1)l+1})\ldots(x_{nl})(\mathfrak{C}_{n-1} \vee \mathfrak{B}_n) \to (x_0)\ldots(x_{(n-1)l})(\mathfrak{C}_{n-1} \vee (x_{(n-1)l+1}),\ldots,(x_{nl})\mathfrak{B}_n).$$

Să notăm faptul că antecedentul acestei implicaţii este tocmai formula $\mathfrak{D}_n$. Şi deci următoarea implicaţie este demonstrabilă

$$\mathfrak{D}_n \to (x_0)\ldots(x_{(n-1)l})(\mathfrak{C}_{n-1} \vee (x_{(n-1)l+1}),\ldots,(x_{nl})\mathfrak{B}_n).$$

Întrucât $\mathfrak{B}_n$ este $\mathfrak{A}(x_{n_1},\ldots,x_{n_k}; x_{(n-1)l+1},\ldots,x_{nl})$, din implicaţia de mai sus, prin aplicarea Regulii δ) cu referire la ultimele l variabile, obţinem

$$\mathfrak{D}_n \to (x_0)\ldots(x_{(n-1)l})(\mathfrak{C}_{n-1} \vee (y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(x_{n_1},\ldots,x_{n_k}; y_1,\ldots,y_l).$$

Din această implicaţie, prin aplicaţii repetate ale Regulii δ) asupra primelor $(n-1)l$ variabile, obţinem

$$\mathfrak{D}_n \to (z_0)(z_1)\ldots(z_{(n-1)l})(\mathfrak{C}^*_{n-1} \vee (y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(z_{n_1},\ldots,z_{n_k}; y_1,\ldots,y_l).$$

După cum ştim toate variabilele $x_{n_1},\ldots,x_{n_k}$ apar deja în $\mathfrak{C}_{n-1}$. Şi deci, prin redenumire formula $\mathfrak{C}^*_{n-1}$ este tocmai formula obţinută din $\mathfrak{C}_{n-1}$ prin substituirea variabilelor z_i pentru x_i.

Aşa cum am văzut mai sus (prima implicaţie din Baza inducţiei), următoarea formulă este demonstrabilă:

$$(y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(z_1,\ldots,z_k; y_1,\ldots,y_l) \to (Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k; y_1,\ldots,y_l).$$

Prin Regula $\alpha 2$) şi Regula IV, din această implicaţie obţinem:

$$\mathfrak{C}^*_{n-1} \vee (y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(z_{n_1},\ldots,z_{n_k}; y_1,\ldots,y_l) \to \mathfrak{C}^*_{n-1} \vee (Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k; y_1,\ldots,y_l).$$

Să notăm faptul că $z_0, z_1, \ldots, z_{(n-1)l}$ sunt variabilele libere din $\mathfrak{C}^*_{n-1}$. Şi deci, prin aplicarea Regulii γ'), cu referire la aceste variabile, din implicaţia de mai sus obţinem

$$(z_0)(z_1)\ldots(z_{(n-1)l})[(\mathfrak{C}^*_{n-1} \vee (y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(z_{n_1}, \ldots, z_{n_k}; y_1, \ldots, y_l)) \rightarrow (\mathfrak{C}^*_{n-1} \vee (Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l))]$$

din care, prin Teorema 31, obţinem

$$(z_0)(z_1)\ldots(z_{(n-1)l})[\mathfrak{C}^*_{n-1} \vee (y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(z_{n_1}, \ldots, z_{n_k}; y_1, \ldots, y_l)] \rightarrow (z_0)(z_1)\ldots(z_{(n-1)l})[\mathfrak{C}^*_{n-1} \vee (Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l) \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)].$$

Să remarcăm faptul că antecedentul acestei implicaţii este tocmai consecventul unei implicaţii mai sus derivate, al cărei antecedent este formula $\mathfrak{D}_n$. Şi astfel, prin aplicarea Regulii V, derivăm

$$\mathfrak{D}_n \rightarrow (z_0)(z_1)\ldots(z_{(n-1)l})(\mathfrak{C}^*_{n-1} \vee (Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l) \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)).$$

Din această implicaţie, prin aplicaţii repetate ale Teoremei 26, Regulii X şi Regulii δ) obţinem:

$$\mathfrak{D}_n \rightarrow (x_0)(x_1)\ldots(x_{(n-1)l})\mathfrak{C}_{n-1} \vee (Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l) \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l).$$

Cum uşor se poate vedea, primul disjunct al consecventului acestei implicaţii este tocmai formula $\mathfrak{D}_{n-1}$. Şi deci implicaţia se poate reda, echivalent, prin

$$\mathfrak{D}_n \rightarrow \mathfrak{D}_{n-1} \vee (Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l).$$

Însă, prin ipoteza inducţiei, avem şi

$$\mathfrak{D}_{n-1} \rightarrow (Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l).$$

Din ultimele două implicaţii, prin calculul propoziţional, derivăm

$$\mathfrak{D}_n \rightarrow (Ex_1)\ldots(Ex_k)(y_1)\ldots(y_l)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l).$$

Din Baza şi Ipoteza inducţiei conchidem că aserţiunea (A) este demonstrată.

Să demonstrăm acum (B). Presupunem că niciuna din formulele $\mathfrak{E}_n$ nu este o formulă propoziţională logic adevărată. Pentru cele ce urmează este oportun să dăm formulelor propoziţionale $\mathfrak{E}_n$ o formă oarecum mai specială. $\mathfrak{E}_n$ a fost obţinută din $\mathfrak{C}_n$ prin înlocuirea cu variabile propoziţionale a componentelor elementare care apar în $\mathfrak{C}_n$, componente care constau din variabile predicative cu argumente din şirul $x_0, x_1, x_2, \ldots$. În această înlocuire vom proceda astfel încât $F(x_0)$ este înlocuită cu F_0, $F(x_1)$ cu F_1, $G(x_1, x_2, x_3)$ cu $G_{1,2,3}$ ş.a.m.d. Atunci, în fiecare formulă $\mathfrak{E}_{n+1}$ apar toate variabilele propoziţionale din $\mathfrak{E}_n$, şi altele în plus. Totalitatea variabilelor propoziţionale care apar în $\mathfrak{E}_n$ ne-o reprezentăm enumerată în vreun fel, astfel încât are sens să vorbim despre prima variabilă, a doua, a treia ş.a.m.d. Această enumeraţie se poate face, de exemplu, enumerând mai întâi variabilele propoziţionale din $\mathfrak{E}_1$ în orice ordine dorim şi adăugând apoi variabilele nou apărute în $\mathfrak{E}_2$ ş.a.m.d.

Acum, fiindcă niciuna din $\mathfrak{E}_n$ nu este o formulă propoziţională logic adevărată, variabilele propoziţionale care apar într-o formulă $\mathfrak{E}_n$ se pot înlocui prin valorile de adevăr "adevărat" şi "fals" în aşa fel încât $\mathfrak{E}_n$ devine o propoziţie falsă. Conectându-ne la terminologia utilizată anterior în calculul propoziţional, putem vorbi despre un sistem de valori de adevăr care satisface $\overline{\mathfrak{E}}_n$. Pentru fiecare $\overline{\mathfrak{E}}_n$ există, fireşte, doar un număr finit de astfel de sisteme diferite; însă toate luate laolaltă numărul acestora este infinit, fiindcă sistemele care se referă la formulele $\overline{\mathfrak{E}}_n$ cu index diferit sunt, evident, considerate ca distincte.

Fiecăreia din infinit de multele variabile propoziţionale îi asociem acum, într-un mod unic, valoarea "adevărat" sau valoarea "fals". Dacă prima variabilă propoziţională este înlocuită în infinit de multe sisteme de valori de adevăr cu valoarea de adevăr "adevărat", atunci îi vom asocia valoarea "adevărat", în caz contrar, valoarea "fals". Considerăm acum doar acele sisteme de valori în care prima variabilă propoziţională a fost înlocuită cu valoarea tocmai asignată ei. Dacă cea de-a doua variabilă

propoziţională apare în infinit de multe sisteme de valori de adevăr cu valoarea "adevărat", atunci i se asignează această valoare, în caz contrar valoarea "fals". În acest mod este stabilită valoarea variabilelor propoziţionale care se succed, considerând de fiecare dată doar sistemele de valori de adevăr în care variabilele propoziţionale precedente au valorile deja stabilite.

Acum, dacă variabilele propoziţionale se înlocuiesc cu valorile asignate lor, atunci toate $\mathfrak{C}_n$ devin simultan propoziţii false. Vom defini acum anumite predicate numerice care vor fi considerate ca substituţii pentru variabilele predicative care apar în $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$. Dacă, de exemplu, apare o variabilă predicativă $F(\ ,\ ,\ )$ cu trei locuri pentru argumente, atunci în $\mathfrak{C}_n$ avem variabilele propoziţionale F_{i_1,i_2,i_3}. Definim acum predicatul numeric asociat Φ prin condiţia că, pentru orice numere naturale, $\Phi(p, q, r)$ va avea întotdeauna valoarea de adevăr care a fost asignată lui $F_{p,q,r}$. Şi astfel, fiecărei variabile predicative îi este asociat un predicat numeric individual cu acelaşi număr de argumente. Acum, dacă în

$$(Ex_1) \ldots (Ex_k)(y_1) \ldots (y_l)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

vom lua numerele naturale ca domeniu de indivizi iar pentru variabilele predicative vom substitui predicatele numerice mai sus definite, atunci, cum uşor se poate vedea, formula devine o propoziţie falsă, cu alte cuvinte

$$(x_1) \ldots (x_k)(Ey_1) \ldots (Ey_l)\overline{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

devine o propoziţie adevărată. Căci dacă selectăm, să zicem, ce de-al n-lea k-tuplu de numere naturale, pe care mai sus l-am denotat cu $(n_1, \ldots, n_k)$, atunci

$$\overline{\mathfrak{A}}(n_1, \ldots, n_k; (n-1)l + 1, \ldots, nl)$$

are, după înlocuirea variabilelor predicative, valoarea de adevăr opusă valorii de adevăr a ultimului disjunct al $\mathfrak{C}_n$ în care variabilele propoziţionale au fost înlocuite cu valorile de adevăr asignate lor, i.e., ea este adevărată.

Întrucât acest lucru este corespunzător valabil pentru fiecare k-tuplu, rezultă că

$$(x_1)\ldots(x_k)(Ey_1)\ldots(Ey_k)\overline{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_k;y_1,\ldots,y_l)$$

este adevărată pentru domeniul de indivizi considerat. Cu aceasta şi (B) este demonstrată.

11. Derivarea consecinţelor din premise date. Relaţia cu formulele universal valide

Până acum calculul predicatelor l-am utilizat doar pentru a deriva formulele universal valide. Aici premisele deducţiilor noastre, Axiomele a)-f), erau ele însele de natură pur logică. Acum, prin câteva exemple, vom prezenta metoda generală a derivării formale în calculul predicatelor, metodă pe care, înainte de a stabili axiomele, am putut-o descrie doar tangenţial. Problema acum este aceea de a deriva consecinţele din premise arbitrare, care nu mai sunt de natură pur logică.

În premise apar acum nu doar variabile, ci şi *predicate individuale* precum şi *obiecte individuale.* Drept simboluri pentru predicatele individuale vom lua fie *majusculele greceşti*, fie o *combinaţie de majuscule latine urmată de minuscule latine, precum* Mu, Om, Dsc etc.; iar pentru predicate matematice vom lua simboluri predicative cunoscute din matematică, precum $<$, $>$, $=$ etc. Conceptul de formulă, aşa cum a fost el introdus în §4, este acum extins corespunzător.

Derivarea formală se realizează scriind premisele deducţiilor simbolizat şi adăgându-le ca formule primitive (axiome) Axiomelor logice a)-f), împreună cu care constituie clasa formulelor iniţiale pentru operaţiile formale care se execută în acord cu regulile de deducţie α), β), γ), δ).

În interpretarea intuitivă a formulelor trebuie avut în vedere faptul că variabilele individuale nu se mai referă, în general, la vreun domeniu de indivizi lăsat nedeterminat, ci acest domeniu, de regulă, este caracterizat mai îndeaproape prin natura premiselor, astfel încât el poate consta din numerele întregi, numerele reale, punctele unui plan sau orice alte

lucruri. Este de asemenea posibil să apară mai multe domenii de indivizi, aşa cum e cazul în cel de-al doilea dintre exemplele considerate mai jos. În acest caz ne trebuie mai multe clase de variabile individuale. Variabilele predicative trebuie atunci deosebite şi după felul argumentelor lor. Axiomele e)-f) se pot atunci scrie de atâtea ori câte clase de obiecte sunt luate în considerare. Complicaţia care rezultă astfel în calculul predicatelor se poate însă evita, deoarece este întotdeauna posibil, aşa cum vom arăta în tratarea celui de-al doilea din exemplele de mai jos, să reducem cazul mai multor domenii de indivizi la cazul unui singur domeniu.

Vom da mai întâi câteva exemple simple.

Ca un prim exemplu ne-ar putea servi un silogism în care apare o judecată singulară. Un silogism de acest fel este cel din exemplul tipic:

"Toţi oamenii sunt muritori, Caius este un om, aşadar Caius este muritor".

În această propoziţie apar trei denotări individuale: două predicate şi un nume propriu. Cuvintelor "om" şi "muritor" le corespund două predicate, $Om(x)$ şi $Mu(x)$, pentru care clasa comună de obiecte, aparţinătoare lor, poate fi considerată clasa fiinţelor. Cel de-al treilea simbol individual este numele propriu "Caius". Scrise ca formule, cele două premise sunt:

$$(x)(Om(x) \to Mu(x)),$$

$$Om(\text{Caius}).$$

Prin substituţie în formula

$$(x)F(x) \to F(y)$$

se obţine:

$$(x)(Om(x) \to Mu(x)) \to (Om(y) \to Mu(y))$$

iar apoi

$$(x)(Om(x) \to Mu(x)) \to (Om(\text{Caius}) \to Mu(\text{Caius})),$$

$$Om(\text{Caius}) \to Mu(\text{Caius}) \qquad [\text{Regula } \beta]$$

$$Mu(\text{Caius}) \qquad [\text{Regula } \beta]$$

Ultima formulă este însă redarea simbolică a concluziei noastre "Caius este muritor".

Vom mai da încă două exemple, de derivări matematice. Vom considera mai întâi următoarea derivare din geometrie:

Ipoteză: "*Prin două puncte diferite trece cel mult o dreaptă.*"

Concluzie: "*Două drepte diferite nu au mai mult decât un punct comun.*"

Predicatele care apar aici sunt următoarele: mai întâi, relaţia $\Lambda(x, y)$: "x se află pe y". Aici primul loc pentru argumente se referă la clasa punctelor, iar cel de-al doilea la cea a dreptelor. Apare apoi predicatul "a fi diferit", adică opusul predicatului identităţii $\equiv (x, y)$. Locurile pentru argumente ale acestui predicat se pot referi atât la puncte cât şi la drepte; fireşte, aserţiunea identităţii unui punct cu o dreaptă trebuie considerată întotdeauna ca falsă. Din motive de claritate, argumentele care se referă la clasa punctelor vor fi denotate cu minuscule latine iar cele care se referă la drepte cu majuscule latine.[13] Nume proprii de indivizi nu apar. Expresia simbolică pentru ipoteză este:

$$(x)(y)\{\overline{\equiv}(x,y) \to \overline{(EG)}(EH)[\overline{\equiv}(G,H)\&\Lambda(x,G)\&\Lambda(x,H)$$
$$\&\Lambda(y,G)\&\Lambda(y,H)]\}.$$

Concluzia se scrie:

$$(G)(H)\{\overline{\equiv}(G,H) \to \overline{(Ex)}(Ey)[\overline{\equiv}(x,y)\&\Lambda(x,G)\&\Lambda(x,H)$$
$$\&\Lambda(y,G)\&\Lambda(y,H)]\}.$$

Dacă $\mathfrak{A}(x, y, G, H)$ este o abreviere pentru

$$\Lambda(x,G)\&\Lambda(y,G)\&\Lambda(x,H)\&\Lambda(y,H)$$

şi facem uz de definiţia simbolului $\to$, atunci ca reprezentare simbolică pentru ipoteză şi concluzie vom obţine:

$$(x)(y)\{\equiv (x,y) \vee \overline{(EG)}(EH)[\overline{\equiv}(G,H)\&\mathfrak{A}(x,y,G,H)]\},$$

[13]O confuzie cu variabilele propoziţionale nu poate să apară aici.

respectiv

$$(G)(H)\{\equiv(G,H)\vee\overline{(Ex)}(Ey)[\overline{\equiv}(x,y)\&\mathfrak{A}(x,y,G,H)]\}.$$

În acord cu regula construcţiei contradictoriei unei expresii, dată în §8, cele două expresii se pot transforma în

$$(x)(y)\{\equiv(x,y)\vee(G)(H)[\equiv(G,H)\vee\overline{\mathfrak{A}}(x,y,G,H)]\},$$

$$(G)(H)\{\equiv(G,H)\vee(x)(y)[\equiv(x,y)\vee\overline{\mathfrak{A}}(x,y,G,H)]\}.$$

Aducem acum ambele expresii la forma normală şi obţinem:

$$(x)(y)(G)(H)\{\equiv(x,y)\vee(\equiv(G,H)\vee\overline{\mathfrak{A}}(x,y,G,H))\},$$

$$(G)(H)(x)(y)\{\equiv(G,H)\vee(\equiv(x,y)\vee\overline{\mathfrak{A}}(x,y,G,H))\}.$$

Din aceste reprezentări formale se vede de-ndată că concluzia se poate deriva din ipoteză, căci formula pentru ipoteză trece în formula pentru concluzie dacă produselor li se aplică legile asociativităţii şi comutativităţii iar cuantificatorilor universali li se aplică regula rearanjării (cf. Regula XII, §8). Totodată recunoaştem că lucrurile au loc şi invers, respectiv, din adevărul concluziei se poate conchide asupra adevărului ipotezei.

Apariţia simultană a două domenii de indivizi se poate evita în următorul fel, a cărui generalizare la cazuri arbitrare nu necesită nicio explicaţie particulară. Luăm ca bază un singur domeniu de indivizi, care constă din puncte şi drepte şi introducem două predicate individuale, $\Pi(x)$ (”x este un punct”) şi $\Gamma(x)$ (”x este o dreaptă”). Atunci ipoteza din exemplul nostru se scrie:

$$(x)(y)\{(\Pi(x)\&\Pi(y)\&\overline{\equiv}(x,y))\rightarrow\overline{(Ez)}(Eu)[\Gamma(z)\&\Gamma(u)$$
$$\&\overline{\equiv}(z,u)\&\Lambda(x,z)\&\Lambda(x,u)\&\Lambda(y,z)\&\Lambda(y,u)]\}.$$

Concluzia se poate exprima într-un mod similar.

Al doilea exemplu de derivare matematică constă în demonstrarea *teoremei tranzitivităţii relaţiei ”de la mai mic la mai mare*”. Această

teoremă, a cărei redare prin formula

$$< (x, y) \& < (y, z) \rightarrow < (x, z)$$

ne este deja cunoscută, o vom înţelege aici în sensul teoriei cantităţilor măsurabile. Locurile pentru argumente ale predicatului $< (x, y)$ le considerăm ca referindu-se la un anume gen de mărime (e.g., lungimi de segmente de dreaptă sau numere reale *pozitive*), iar predicatul îl considerăm ca derivând din adiţia mărimilor. Introducem simbolul $\Phi(x, y, z)$ pentru predicatul triadic "x mărit cu y dă z" (sau, scris aritmetic: $x + y = z$). Cu ajutorul acestui predicat, $< (x, y)$ se poate defini prin

$$(Eu)\Phi(x, u, y).$$

("Există un u care adăugat lui x dă y".)

Dacă substituim această definiţie în teorema noastră, atunci această teoremă capătă următoarea formă:

$$[(Eu)\Phi(x, u, y) \& (Eu)\Phi(y, u, z)] \rightarrow (Eu)\Phi(x, u, z).$$

În această formă teorema pe care o avem în vedere se poate demonstra cu condiţia că două postulate vom asuma cu privire la adiţia mărimilor:

1. "Două mărimi pot fi întotdeauna adunate", i.e.,

$$(Ez)\Phi(x, y, z).$$

2. "Pentru adiţia mărimilor este valabilă legea asociativităţii

$$x + (y + z) = (x + y) + z\text{"},$$

i.e.,

$$[\Phi(x, y, u) \& \Phi(y, z, v) \& \Phi(u, z, w)] \rightarrow \Phi(x, v, w).$$

Cele două postulate sunt în forma normală şi conţin variabile libere. Dacă şi teorema o aducem în forma normală, atunci aceasta capătă următoarea formă:

$$(u)(v)(Ew)(\overline{\Phi}(x, u, y) \vee \overline{\Phi}(y, v, z) \vee \Phi(x, w, z)).$$

Aceasta se poate scrie şi astfel:

$$(u)(v)(Ew)(\Phi(x,u,y)\&\Phi(y,v,z)\to\Phi(x,w,z)).$$

Pe baza postulatelor noastre, această formulă se poate deriva în felul următor:

Prin redenumirea variabilelor, din cele două postulate se obţine

1. $(Ew)\Phi(u,v,w)$.

2. $(\Phi(x,u,y)\&\Phi(u,v,w)\&\Phi(y,v,z))\to\Phi(x,w,z)$.

Dacă la cel de-al doilea postulat se aplică Regula VII (Cap. 1, §11), atunci aceasta se poate transforma în:

$$\Phi(u,v,w)\to[(\Phi(x,u,y)\&\Phi(y,v,z))\to\Phi(x,w,z)].$$

Prin utilizarea regulii aferente Teoremei 34, din această formulă derivăm:

$$(Ew)\Phi(u,v,w)\to(Ew)[(\Phi(x,u,y)\&\Phi(y,v,z))\to\Phi(x,w,z)].$$

Acum, întrucât $(Ew)\Phi(u,v,w)$ a fost asumată ca adevărată, obţinem, mai departe

$$(Ew)(\Phi(x,u,y)\&\Phi(y,v,z)\to\Phi(x,w,z)).$$

Din această formulă teorema rezultă dacă, în acord cu Regula γ'), o prefixăm cu cuantificatorii universali (u) şi (v).

Metoda explicată în acest paragraf, a derivării formale din premise care nu reprezintă formule universal valide, îşi găseşte aplicaţia sa principală în problema elaborării principiilor sau axiomelor pentru un domeniu arbitrar al cunoaşterii şi a derivării din acestea a restului teoremelor în calitate de consecinţe. S-ar putea chiar spune că ideea de sistem axiomatic abia acum îşi găseşte formularea sa riguroasă; deoarece ideea de axiomatizare completă nu presupune doar expunerea axiomelor ca atare, ci şi redarea exactă a mijloacelor logice care ne dau posibilitatea să derivăm noi teoreme din axiome. La întrebarea dacă orice propoziţie, care intuitiv reprezintă o consecinţă a axiomelor, poate fi obţinută şi cu procedeul derivării formale, ne vom opri la finele acestui paragraf.

Sistemele de axiome, în măsura în care se pot ele formaliza ca atare în cadrele calculului restrâns al predicatelor, tratat aici, se împart în două clase. Printr-un *sistem axiomatic de ordinul întâi* vom înţelege unul în care axiomele individuale nu conţin nicio variabilă predicativă, ci doar predicate individuale. (Aici şi în cele ce urmează, prin axiome vom înţelege doar formulele iniţiale, caracteristice domeniului respectiv, nu formulele logice primitive ale §5, care aparţin construcţiei invariabile a oricărui sistem axiomatic.) Dacă în axiome apar şi variabile predicative, atunci vorbim despre un *sistem axiomatic de ordinul doi.* O excepţie la această clasificare se face doar cu referire la axiomele identităţii. Dacă pentru predicatul identităţii vom utiliza din nou simbolul $\equiv$, atunci aceste axiome au următoarea formă:

$$\equiv (x, x)$$
$$\equiv (x, y) \rightarrow (F(x) \rightarrow F(y)).$$

(În axiomatica intuitivă cel mai adesea aceste axiome sunt omise, întrucât ele au o natură pur logică. Cf. Cap. 4, §1.) În cea de-a doua dintre aceste axiome apare o variabilă predicativă. Cu toate acestea, sistemele axiomatice în care apar variabile predicative doar în axiomele identităţii sunt considerate sisteme de ordinul întâi. Motivul este acela că a doua axiomă a identităţii, în măsura în care problema este utilizarea ei în sistemul axiomatic la care ne referim, se poate întotdeauna înlocui cu axiome fără variabile predicative. Deoarece în locul acestei axiome se pot lua axiomele care rezultă din ea substituind pentru F (în acord cu Regula $\alpha 3$)) predicate individuale care apar în sistemul axiomatic şi adăugând axiomele care exprimă simetria şi tranzitivitatea identităţii. De exemplu, dacă în sistemul axiomatic avem predicatele individuale $\Phi(\ )$ şi $\Psi(\ ,\ )$, atunci axiomele identităţii vor fi:

$$\equiv (x, x)$$
$$\equiv (x, y) \rightarrow \equiv (y, x)$$
$$(\equiv (x, y) \& \equiv (y, z)) \rightarrow \equiv (x, z)$$
$$\equiv (x, y) \rightarrow (\Phi(x) \rightarrow \Phi(y))$$

$$\equiv (x, y) \to (\Psi(x, z) \to \Psi(y, z))$$
$$\equiv (x, y) \to (\Psi(z, x) \to \Psi(z, y));$$

corespunzător vom proceda şi în celelalte cazuri. Vom renunţa aici la o demonstraţie riguroasă a ideii acestei înlocuiri.

Un sistem axiomatic de ordinul doi este, de exemplu, sistemul axiomatic Peano pentru numerele naturale, întrucât formularea axiomei inducţiei complete cere utilizarea unei variabile predicative. Un alt exemplu îl constituie sistemul axiomatic pentru teoria mulţimilor, în formularea lui originală (Zermelo), dată fiind ocurenţa unei variabile predicative în axioma alegerii. Din sistemele de ordinul întâi fac parte, printre altele, sistemul axiomatic hilbertian pentru geometrie, abstracţie făcând de axioma continuităţii, dar şi sistemul axiomatic al teoriei grupurilor.

Drept problemă fundamentală s-ar putea acum ridica întrebarea: dacă pentru o propoziţie dată dintr-un domeniu al cunoaşterii este posibil să stabilim dacă este sau nu o consecinţă a axiomelor.

Vom arăta acum că această problemă se poate reduce la una a calculului pur al predicatelor, i.e., a calculului elaborat în §5, care conţine doar variabile individuale şi variabile predicative. Căci întrebarea privitoare la dependenţa logică a unei propoziţii de un sistem axiomatic se poate reduce la o alta, respectiv dacă o anumită formulă a calculului pur al predicatelor este sau nu o formulă universal validă. Totuşi, acest lucru este valabil doar în cazul în care sistemul axiomatic este unul de ordinul întâi. Demonstraţia acestui lucru o vom ilustra printr-un exemplu particular.

În investigaţia interdependenţei logice dintre diferitele grupe de axiome ale geometriei există un rezultat de o importanţă şi de un interes anume, potrivit căruia teorema specială a lui Pascal, care joacă un rol esenţial în fundamentarea teoriei proporţiei fără utilizarea axiomei continuităţii, nu poate fi demonstrată doar din axiomele de incidenţă, de ordine şi din axioma paralelelor. Problema este să arătăm că independenţa teoremei lui Pascal de axiomele menţionate este echivalentă cu nedemonstrabilitatea unei anumite formule a calculului pur al predicatelor.

Mai întâi trebuie să exprimăm în calculul nostru atât axiomele considerate cât şi teorema specială a lui Pascal, şi anume în aşa fel încât vom vorbi doar de un singur gen de lucruri. Pentru evitarea mai multor domenii de indivizi, nu vom utiliza aici metoda general aplicabilă, menţionată anterior, ci una care este special adecvată exemplului nostru. Pentru aceasta trebuie doar ca în locul relaţiei de bază dintre puncte şi drepte (”punctul x se află pe dreapta y” sau ”punctele x, y definesc dreapta z”) să introducem o relaţie între trei puncte $Dr(x, y, z)$ (”x, y şi z se află pe o dreaptă”). Similar, în locul relaţiei de bază dintre puncte şi plane, vom lua o relaţie dintre patru puncte $Pl(x, y, z, u)$ (”x, y, z, u se află într-un plan”).

La aceste două predicate trebuie să adăugăm şi relaţia de identitate $\equiv (x, y)$, dar şi relaţia ”a se afla între” $Intr(x, y, z)$ (”x se află între y şi z”).

Cu ajutorul acestor patru relaţii introduse, toate axiomele care apar în problema noastră, inclusiv teorema lui Pascal, se pot acum reda prin formule logice. Esenţial aici este ca în aceste formule să evităm variabilele individuale libere, lucru posibil dacă prefixăm peste tot formulele cu cuantificatori universali. De exemplu, axioma ”Prin două puncte trece doar o singură dreaptă” este redată prin formula:

$$(x)(y)(u)(v)\{[Dr(x, y, u)\&Dr(x, y, v)\&\overline{\equiv}(x, y)\&\overline{\equiv}(u, v)] \rightarrow Dr(x, u, v)\},$$

în cuvinte: ”Dacă x, y şi u se află pe o dreaptă şi x, y, v se află pe o dreaptă şi, în plus, x este diferit de y şi u este diferit de v, atunci şi x, u şi v se află pe o dreaptă”. Axioma ”Dacă două plane au un punct comun, atunci ele au cel puţin un alt punct comun” se redă prin formula:

$$(x)(y)(z)(u)(v)(w)(p)\{[Pl(x, y, z, p)\&Pl(u, v, w, p)] \rightarrow$$
$$(Eq)(\overline{\equiv}(p, q)\&Pl(x, y, z, q)\&Pl(u, v, w, q))\}.$$

Axiomei, esenţiale pentru ordonarea în plane, ”Dacă o dreaptă aflată în planul unui triunghi intersectează o latură a acestui triunghi, atunci ea intersectează încă o altă latură a triunghiului” îi corespunde următoarea

formulă:

$$(x)(y)(z)(u)(v)\{[Pl(x,y,z,u)\&\overline{Dr}(x,y,z)\&Intr(v,x,y)\&$$
$$\overline{Dr}(x,y,u)\&\overline{Dr}(z,u,v)] \to (Ew)[Dr(u,v,w)\&$$
$$\&(Intr(w,x,z) \vee Intr(w,y,z))]\}.$$

Trebuie menţionat faptul că în introducerea relaţiilor "Dr" şi "Pl", pentru aceste relaţii proprietatea simetriei trebuie să fie formulată ca axiome. Vom construi astfel formula:

$$(x)(y)(z)\{Dr(x,y,z) \to (Dr(x,z,y)\&Dr(y,x,z))\},$$

dar şi formula corespunzătoare pentru Pl. *Proprietăţile relaţiei de identitate* trebuie de asemenea formulate ca axiome:

$$(x)(y)(\equiv(x,y) \to \equiv(y,x)),$$
$$(x) \equiv (x,x),$$
$$(x)(y)(z)\{\equiv(x,z)\& \equiv(y,z) \to \equiv(x,y)\},$$
$$(x)(y)(z)(u)\{(\equiv(x,u)\&Dr(x,y,z)) \to Dr(u,y,z)\},$$
$$(x)(y)(z)(u)(v)\{(\equiv(x,v)\&Pl(x,y,z,u)) \to Pl(v,y,z,u)\},$$
$$(x)(y)(u)(z)\{(\equiv(x,y)\&Intr(x,u,z)) \to Intr(y,u,z)\},$$
$$(x)(y)(u)(z)\{(\equiv(x,y)\&Intr(u,x,z)) \to Intr(u,y,z)\}.$$

Ultimele patru formule exprimă faptul că în orice relaţie cu care operăm obiectele identice pot fi înlocuite reciproc. Să ne reprezentăm acum că toate axiomele scrise în formule sunt legate prin simbolul & într-o singură formulă. Aceasta exprimă condiţia integrală impusă predicatelor "$\equiv$", "Dr", "$Intr$", "Pl" sau, cum se mai spune în axiomatică, ea conţine definiţia implicită a acestor predicate. Drept abreviere pentru această formulă, vom scrie:

$$\mathfrak{A}(\equiv, Dr, Intr, Pl).$$

Exprimată în mod uzual, teorema specială a lui Pascal sună astfel: Fie A, B, C şi A', B', C', câte trei puncte aflate respectiv pe două drepte care se intersectează, astfel încât niciunul nu coincide cu punctul de intersecţie

al celor două drepte. Atunci dacă BC' este paralelă cu CB' iar CA' paralelă cu AC', atunci şi AB' este paralelă cu BA'. Această teoremă poate fi de asemenea exprimată printr-o formulă logică în care, dintre predicatele de mai sus, apar doar "$\equiv$" şi "Dr". Vom denota această formulă cu $\mathfrak{P}(\equiv, Dr)$. Aserţiunea pe care o avem în discuţie spune că din

$$\mathfrak{A}(\equiv, Dr, Intr, Pl)$$

nu poate fi demonstrată

$$\mathfrak{P}(\equiv, Dr).$$

În această aserţiune semnificaţia geometrică efectivă a $\equiv, Dr, Intr, Pl$ nu mai apare. Căci, în acord cu punctul de vedere axiomatic, în demonstraţia unei teoreme din axiome geometrice, din relaţiile de bază introduse nu se poate utiliza nimic altceva decât ceea ce este formulat explicit în axiome.

Putem aşadar să eliminăm cu totul aceste predicate iar în locul lor să punem patru variabile predicative, fireşte, cu locurile corespunzătoare pentru argumente:

$$F(x, y); \quad G(x, y, z); \quad H(x, y, z); \quad K(x, y, z, u).$$

Demonstrabilitatea teoremei lui Pascal ar însemna că pentru orice patru astfel de predicate F, G, H, K, pentru care

$$\mathfrak{A}(F, G, H, K)$$

este adevărată, este adevărată şi $\mathfrak{P}(F, G)$, i.e., că

$$\mathfrak{A}(F, G, H, K) \to \mathfrak{P}(F, G)$$

este o formulă universal validă. Trebuie să arătăm aşadar că *nu* astfel stau lucrurile.

În acelaşi mod, pentru orice altă teoremă geometrică se poate găsi o formulă a calculului predicatelor care-i corespunde, astfel încât teorema este o consecinţă a axiomelor dacă şi numai dacă formula logică este una universal validă. În mod similar, problemele *consistenţei* pot fi aduse în

interrelaţie cu validitatea universală a anumitor formule. De exemplu, întrebarea dacă axiomele geometrice comasate în formula

$$\mathfrak{A}(\equiv, Dr, Intr, Pl)$$

sunt compatibile este echivalentă cu o alta, dacă formula

$$\overline{\mathfrak{A}}(F, G, H, K)$$

nu este o formulă universal validă.

Putem apoi afirma că *orice consecinţă a unui sistem axiomatic de ordinul întâi poate fi obţinută din acest sistem şi cu ajutorul metodei formale de derivare prezentate la începutul acestui paragraf.* Căci formula universal validă care exprimă dependenţa logică a teoremei de axiome este de asemenea demonstrabilă, în acord cu §10. După substituţia de predicate specifice pentru variabilele predicative în această formulă Regula detaşării ne livrează teorema însăşi.

Remarcile noastre ultime cu privire la echivalenţa dintre dependenţa unei teoreme de un sistem axiomatic şi validitatea universală a unei anumite formule a calculului predicatelor se referă, aşa cum am menţionat deja, doar la sisteme axiomatice de ordinul întâi. Pentru sisteme axiomatice de ordinul doi există însă raporturi similare. Doar că formula universal validă aflată în discuţie nu mai poate fi exprimată cu mijloacele calculului restrâns al predicatelor, ci aparţine calculului extins al predicatelor, care va fi tratat în Capitolul 4.

12. Problema deciziei

Din consideraţiile paragrafului precedent rezultă importanţa fundamentală a problemei determinării pentru o formulă dată a calculului predicatelor dacă ea este sau nu universal validă. În acord cu definiţia dată în §5, validitatea universală a unei formule înseamnă acelaşi lucru ca validitatea universală a formulei pentru orice domeniu de indivizi. De aceea referirea la această problemă se face şi în termenii *problema validităţii universale* a unei formule. Mai exact, în locul validităţii universale

ar trebui să se spună validitatea universală în orice domeniu de indivizi. În acord cu expunerile din §10, formulele universal valide ale calculului predicatelor sunt exact formulele care pot fi derivate din sistemul axiomatic al §5. Acest fapt nu ne poate ajuta în soluţionarea problemei validităţii universale, deoarece nu avem niciun criteriu general pentru deductibilitatea unei formule.

O formulă a calcului pur al predicatelor, i.e., o formulă în care nu apar simboluri individuale, se numeşte *satisfiabilă* într-un domeniu de indivizi, dacă variabilele propoziţionale sunt înlocuite prin valorile "adevărat" şi "fals", variabilele predicative sunt înlocuite cu predicate individuale arbitrare, definite în domeniul respectiv de indivizi, iar variabilele individuale libere sunt înlocuite cu obiecte individuale în aşa fel încât formula trece într-o propoziţie adevărată. Dacă despre o formulă se spune, simplu, că este satisfiabilă, atunci prin aceasta vom înţelege că există un domeniu de indivizi în care ea este satisfiabilă. Dacă o formulă $\mathfrak{A}$ nu este universal validă în vreun domeniu dat de indivizi, atunci, evident, $\overline{\mathfrak{A}}$ este satisfiabilă în domeniul respectiv, şi invers. Similar, validitatea universală în general a unei formule $\mathfrak{A}$ şi satisfiabilitatea formulei $\overline{\mathfrak{A}}$ se află în raport de afirmare şi negare.

La cele două probleme echivalente, cea a *validităţii universale* şi cea a *satisfiabilităţii*, în mod obişnuit ne referim şi cu numele comun de *problema deciziei* calculului restrâns al predicatelor. Potrivit observaţiilor făcute în §11, suntem îndreptăţiţi s-o numim *problema principală a logicii matematice.*

Conceptele validităţii universale şi satisfiabilităţii le vom clarifica prin câteva exemple. Universal valide sunt, de exemplu, toate formulele pe care le-am putut deriva din axiomele logice, precum Teoremele 21-36 ale §6. Toate formulele universal valide sunt, fireşte, şi satisfiabile. Formula

$$(Ex)F(x)$$

nu este, desigur, universal validă dar este satisfiabilă. Trebuie doar să luăm pentru F predicatul "a fi identic cu el însuşi", într-un domeniu de

indivizi arbitrar ales. Acest predicat are loc nu doar pentru un obiect, ci pentru toate obiectele. De aici rezultă că

$$(x)F(x)$$

este de asemenea satisfiabilă. Apoi, satisfiabilă este şi formula

$$(x)\overline{F}(x,x)\&(x)(Ey)F(x,y).$$

Trebuie doar să luăm ca domeniu de indivizi numerele întregi iar pentru $F(x,y)$ să substituim predicatul $x < y$. Drept exemplu de formulă nesatisfiabilă, menţionăm

$$(Ex)(y)(F(x,x)\&\overline{F}(x,y)),$$

deoarece negaţia ei

$$(x)(Ey)(\overline{F}(x,x) \vee F(x,y))$$

este o formulă validă, dat fiind faptul că pentru fiecare x există un y de felul cerut; dat fiind faptul că pe y îl putem lua ca fiind x însuşi.

Problemei deciziei i se poate da şi o *formă mai tare*. O formulă care este satisfiabilă în vreun domeniu de indivizi nu trebuie să fie satisfiabilă în orice domeniu de indivizi. De exemplu, formula

$$(Ex)(Ey)(F(x)\&\overline{F}(y))$$

este, desigur, satisfiabilă. Trebuie doar să luăm ca domeniu de indivizi domeniul care constă din 0 şi 1 iar pentru F să substituim predicatul "$x = 0$". Atunci există un x şi un y astfel încât $x = 0$ şi $y \neq 0$, respectiv 0 şi 1. Formula nu este însă satisfiabilă într-un domeniu de indivizi care constă doar dintr-un singur element, deoarece un predicat nu poate să aibă şi să nu aibă loc simultan despre acelaşi lucru. Similar, negaţia formulei de mai sus,

$$(x)(y)(\overline{F}(x) \vee F(y))$$

este universal validă dacă există numai un obiect în domeniul de indivizi, în caz contrar nu.

Dacă satisfiabilitatea sau validitatea universală a unei formule au loc într-un domeniu de indivizi, atunci au loc şi în orice alt domeniu de indivizi cu acelaşi număr cardinal, aşa cum uşor se poate constata printr-o corespondenţă unu-la-unu a domeniilor. Aşadar, abstracţie făcând de formulele care sunt universal valide (respectiv satisfiabile) în orice domeniu de indivizi şi abstracţie făcând de cele care nu au această proprietate pentru niciun domeniu, *asertarea validităţii universale, respectiv satisfiabilităţii unei formule logice este echivalentă cu o propoziţie despre numărul de indivizi.* În sensul cel mai larg, problema deciziei poate fi considerată soluţionată dacă avem o metodă care ne permite să decidem pentru orice formulă dată *în care domenii de indivizi este ea universal validă, respectiv satisfiabilă, şi în care nu.*

Cât priveşte relaţia dintre cele două forme ale problemei deciziei una cu cealaltă, avem deja o teoremă remarcabilă în §10.

Dacă o formulă este universal validă într-un domeniu infinit numărabil, atunci ea este universal validă în orice domeniu, i.e., ea este o formulă identică.

Formulată cu referire la satisfiabilitate, teorema ar fi următoarea:

Dacă o formulă este satisfiabilă în vreun domeniu de indivizi, atunci satisfiabilitatea ei are loc şi într-un domeniu infinit numărabil de indivizi.

Drept extensie (fireşte, mult mai trivială) a acestei teoreme avem:

Dacă o formulă este satisfiabilă într-un domeniu arbitrar de indivizi, atunci ea este satisfiabilă şi în orice domeniu care conţine un număr mai mare de indivizi.

De fapt, definiţia predicatelor care satisfac o formulă într-un domeniu (J) se poate uşor extinde în aşa fel încât satisfiabilitatea are loc şi într-un domeniu de indivizi (J') care conţine (J) ca subdomeniu. Pentru aceasta vom selecta din (J) un element arbitrar α şi vom extinde definiţia predicatelor la domeniul (J') procedând ca şi când toate elementele lui (J') care nu aparţin lui (J) ar fi identice cu α. Dacă, de exemplu, pentru domeniul (J) avem un predicat Φ cu n locuri pentru argumente, care satisface formula, atunci predicatul corespunzător lui, Ψ, în (J') este

definit în felul următor: Pentru toţi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din (J') are loc:

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \Phi(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_n).$$

Aici $\mathfrak{r}_i$ este identic cu x_i, dacă x_i aparţine lui (J), în caz contrar el este acelaşi ca α. Din modul în care predicatele sunt definite rezultă apoi satisfiabilitatea în domeniul (J'), lucru pe care nu-l vom expune detaliat aici.

În cazul în care domeniul de indivizi conţine un număr finit fixat de indivizi, decizia cu privire la validitatea universală, respectiv satisfiabilitatea unei formule, poate fi întotdeauna făcută.

De fapt, în acest caz cuantificatorii universali se pot înlocui cu o conjuncţie finită iar cei existenţiali cu o disjuncţie finită de propoziţii, şi astfel validitatea universală, respectiv satisfiabilitatea formulei în domeniul finit, se reduce la validitatea universală, respectiv satisfiabilitatea unei formule a calculului propoziţional.

Un exemplu va face mai clar acest lucru. Să luăm ca problemă examinarea satisfiabilităţii formulei

$$(Ex)(y)(F(x,x)\&\overline{F}(x,y))$$

într-un domeniu care constă din două elemente. Dacă denotăm elementele acestui domeniu cu 0 şi 1, atunci pentru acest domeniu orice formulă $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ este echivalentă cu $\mathfrak{A}(0) \vee \mathfrak{A}(1)$ iar orice formulă $(x)\mathfrak{A}(x)$ este echivalentă cu $\mathfrak{A}(0)\&\mathfrak{A}(1)$. Şi astfel, formula de mai sus poate fi înlocuită mai întâi cu

$$(y)(F(0,0)\&\overline{F}(0,y)) \vee (y)(F(1,1)\&\overline{F}(1,y)),$$

iar apoi cu

$$(F(0,0)\&\overline{F}(0,0)\&F(0,0)\&\overline{F}(0,1)) \vee (F(1,1)\&\overline{F}(1,0)\&F(1,1)\&\overline{F}(1,1)).$$

Tot ceea ce trebuie să facem acum este să înlocuim $F(0,0)$, $F(0,1)$ ş.a.m.d. cu propoziţii adevărate şi false astfel încât întreaga formulă ia valoarea "adevărat". Cu alte cuvinte, satisfiabilitatea formulei într-un domeniu cu două elemente se reduce la satisfiabilitatea formulei

propoziţionale

$$(A\&\overline{A}\&A\&\overline{B}) \vee (C\&\overline{D}\&C\&\overline{C}).$$

Din ultimele teoreme rezultă următoarele: *Dacă pentru o formulă dată se poate arăta că satisfiabilitatea ei are loc dacă şi numai dacă formula este satisfiabilă într-un domeniu de indivizi care constă dintr-un număr finit fixat k de indivizi, atunci problema satisfiabilităţii este decisă pentru toate domeniile de indivizi.*

Căci, mai întâi, putem determina dacă formula este satisfiabilă într-un domeniu cu k indivizi. Dacă nu acesta este cazul, atunci formula nu este satisfiabilă în niciun domeniu. Însă, dacă ea este satisfiabilă în acest domeniu, atunci ea este satisfiabilă şi în toate domeniile cu un număr mai mare de indivizi. Atunci ne rămâne doar să investigăm satisfiabilitatea formulei în domenii cu $1, 2, \ldots, k-1$ elemente, lucru care de asemenea se poate constata.

Să remarcăm totodată faptul că în acest fel nu se poate ajunge la o soluţie generală a problemei deciziei. *Căci există formule care nu sunt satisfiabile în niciun domeniu finit de indivizi, dar care sunt satisfiabile într-un domeniu cu infinit de multe elemente.* Din aceste formule face parte, de exemplu,

$$(x)(Ey)F(x,y)\&(x)\overline{F}(x,x)\&(x)(y)(z)((F(x,y)\&F(y,z)) \to F(x,z)).$$

Această formulă este satisfăcută, de exemplu, în domeniul numerelor naturale, de către predicatul $x < y$. Dimpotrivă, asumpţia satisfiabilităţii ei într-un domeniu cu un număr finit de indivizi generează de-ndată o contradicţie. Fie, de exemplu, Φ predicatul care o satisface. Dat fiind adevărul subformulei $(x)(Ey)\Phi(x,y)$, ar exista un lanţ de elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ care poate fi extins nedefinit, astfel încât $\Phi(a_i, a_{i+1})$ are întotdeauna loc. Dată fiind asumata finitudine a domeniului de indivizi, ar exista un i şi un k $(k > i)$ astfel încât a_i şi a_k sunt unul şi acelaşi element. Din

$$(x)(y)(z)((\Phi(x,y)\&\Phi(y,z)) \to \Phi(x,z))$$

ar rezulta atunci $\Phi(a_i, a_i)$, pe când $(x)\overline{\Phi}(x,x)$ trebuie să fie totuşi cazul.

În timp ce în calculul propoziţional problema deciziei a fost uşor de soluţionat, de exemplu prin utilizarea formei normale conjunctive sau disjunctive (comp. Cap. 1, §4, §6, dar şi §8), în calculul predicatelor problema deciziei reprezintă o problemă foarte dificilă şi în ansamblu una insolvabilă. Anumite raţiuni, redate mai detaliat ceva mai jos, chiar lasă să pară fără de speranţă căutarea unei soluţii complete. Dată fiind semnificaţia centrală a problemei, chiar şi strădaniile de a da o procedură de decizie cel puţin pentru o cât mai largă clasă posibilă de formule, sunt de un mare interes. În cele ce urmează vom expune rezultatele esenţiale în această direcţie.

În toate consideraţiile care urmează vom presupune că avem în vedere întotdeauna formule care nu mai conţin nicio variabilă individuală liberă. Înainte de a ne îndrepta atenţia asupra cazurilor speciale soluţionate ale problemei deciziei, ne vom opri la câteva teoreme cu caracter mai general, aflate în relaţie cu problema deciziei. Unele dintre aceste teoreme le-am menţionat deja în §8, respectiv teorema despre *forma normală prenexă* şi cea despre *forma normală Skolem*. Ele au avantajul că în consideraţiile privitoare la validitatea universală sau satisfiabilitatea formulelor pot fi avute în vedere doar formulele aflate într-o formă normală specială sau redusă, fără ca prin aceasta consideraţiile să-şi piardă din generalitate. Pentru acest motiv ele se mai numesc şi *teoreme de reducţie*. De exemplu, teorema lui Skolem (formulată aici în raport cu satisfiabilitatea) asertează că pentru orice formulă dată a calculului predicatelor se poate găsi o altă formulă, cu un prefix de forma

$$(x_1)\dots(x_m)(Ey_1)\dots(Ey_n),$$

a cărei satisfiabilitate este echivalentă cu satisfiabilitatea formulei date. De aceea în problema satisfiabilităţii trebuie să considerăm doar formule care au un prefix de forma menţionată.

Alte teoreme de acest gen se referă, de asemenea, fie la reducţia formulelor la formule cu anumite prefixe, fie la reducţia numărului de argumente în variabilele predicative care apar, fie la reducţia numărului

variabilelor predicative etc. Dintre numeroasele rezultate în acest sens vom menţiona doar următoarele:

Pentru orice formulă se poate găsi una echivalentă ei sub raportul satisfiabilităţii, dar în care apar doar variabile predicative monadice şi diadice.[14] Apoi, ne putem chiar limita la acele formule în care apare o singură variabilă predicativă diadică şi, în plus, are prefixul de forma[15]

$$(Ex_1)\ldots(Ex_m)(y_1)(y_2)(Ez)(u_1)\ldots(u_n).$$

Mai departe, în problema satisfiabilităţii ne putem restrânge la acele formule care au un prefix de forma[16]

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)\ldots(Ey_n).$$

În fine, în problema satisfiabilităţii este suficient să considerăm şi astfel de formule care au un prefix de forma[17]

$$(Ex)(y)(Ez)(u_1)\ldots(u_n).$$

Referitor la demonstraţia acestor teoreme, trimitem la lucrările originale citate.[18]

Vom prezenta acum cazurile speciale cele mai importante în care o soluţie a problemei deciziei a izbutit. Aceste cazuri speciale constituie o anumită paralelă la teoremele de reducţie de mai sus. Teoremei potrivit căreia pentru orice formulă a calculului predicatelor se poate găsi o altă formulă echivalentă sub aspectul satisfiabilităţii, în care apar doar

[14] L. Löwenheim, lucrarea citată în §10.

[15] L. Kalmár, *Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen.* Comp. Math. Vol. 4(1936). Comp. şi lucrările anterioare, indicate acolo, ale autorului.

[16] K. Gödel, *Zum Enstscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls.* Mh. Math. Physik, Vol. 40(1933).

[17] W. Ackermann, *Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.* Math. Ann. Vol. 112(1936).

[18] Alte teoreme de reducţie se găsesc în lucrările: J. Pepis, *Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems.* Acta Lit. Szeged, Vol. 8(1936). Th. Skolem, *Einige Reduktionen des Entscheidungsproblems.* Avh. Vid. Akad. Oslo, I Mat.-Nat. Klasse 1936, Nr. 6.

variabile predicative monadice şi diadice, îi corespunde teorema potrivit căreia *decizia pentru clasa formulelor care conţin doar variabile predicative monadice, a fost soluţionată.* Similar, teoremelor care, cu referire la problema deciziei, consideră reducţia formulelor la acele formule care au anumite prefixe, le corespunde faptul că pentru anumite clase de prefixe s-a putut de asemenea obţine o soluţie a problemei deciziei.

Posibilitatea de principiu a deciziei în cazul predicatelor monadice a fost recunoscută pentru prima dată de L. Löwenheim.[19] Demonstraţii mai simple au fost date[20] de Th. Skolem[21] şi H. Behmann.[22] Prin relevanţa lor, aceste demonstraţii trec dincolo de domeniul calculului restrâns al predicatelor, întrucât ele soluţionează problema deciziei, în măsura în care apar doar predicate monadice, şi pentru calculul predicatelor de ordinul doi, care va fi tratat în Capitolul 4. La acest lucru vom reveni în următorul capitol.

De alftel, în consideraţiile care urmează este mai convenabil să considerăm problema validităţii universale. De decidabilitatea formulelor calculului restrâns al predicatelor care conţin doar variabile predicative monadice ne putem uşor convinge în următorul mod.

Fie dată o formulă de acest gen. Fie k numărul simbolurilor predicative distincte $A, B, \ldots, K$, care apar în această formulă. Asertăm următoarele: *Dacă formula este universal validă în toate cazurile în care domeniul de indivizi are cel mult* 2^k *obiecte, atunci ea este universal validă în orice domeniu.*

---

[19]L. Löwenheim, *loc. cit.*

[20]O tratare specială, clară a calculului predicatelor monadice se găseşte în Hilbert-Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I (Comp. în mod special §5, pp. 194-195).

[21]Th. Skolem, *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktation- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen.* Vid. Skrifter I, Mat.-nat. Klasse 1919, No. 3.

[22]H. Behmann, *Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem*, Math. Ann. Vol. 86(1922).

Pentru demonstraţie presupunem că formula considerată generează o propoziţie falsă pentru un anumit sistem de mai mult decât 2^k indivizi, prin înlocuirea variabilelor predicative $A, B, \ldots, K$ cu predicate definite $A_0, B_0, \ldots, K_0$. Din această propoziţie vom deriva apoi o altă propoziţie falsă care de asemenea rezultă prin "specializarea" formulei considerate şi care se referă la un sistem de cel mult 2^k indivizi.

Dizivăm obiectele, la care propoziţia falsă de mai sus (cu predicatele $A_0, B_0, \ldots, K_0$) se referă, în clase considerând două obiecte a, b în aceeaşi clasă dacă propoziţiile

$$A_0(a), B_0(a), \ldots, K_0(a)$$

au, respectiv, aceleaşi valori de adevăr ca

$$A_0(b), B_0(b), \ldots, K_0(b),$$

şi deci

$A_0(a)$ are aceeaşi valoare de adevăr ca $A_0(b)$,

$B_0(a)$ are aceeaşi valoare de adevăr ca $B_0(b)$,

....

$K_0(a)$ are aceeaşi valoare de adevăr ca $K_0(b)$.

În acest fel obţinem cel mult 2^k clase. Deoarece pentru un obiect a propoziţia $A_0(a)$ poate să fie doar adevărată sau falsă, acelaşi lucru fiind valabil şi pentru $B_0(a)$ ş.a.m.d. În total există aşadar doar 2^k posibilităţi de distribuire a adevărului şi falsităţii pentru propoziţiile

$$A_0(a), B_0(a), \ldots, K_0(a),$$

iar dacă pentru două obiecte avem aceeaşi distribuire, atunci ele aparţin aceleiaşi clase.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ clasele distincte pe care astfel le obţinem; unde, aşadar, $n \leq 2^k$. Vom lua acum mulţimea claselor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ca un nou sistem de obiecte. Cu referire la aceste obiecte vom defini k predicate $A_1, B_1, \ldots, K_1$ în următorul mod: A_1 are loc pentru clasa α_p

$(p = 1, \ldots, n)$ dacă şi numai dacă A_0 are loc pentru obiectele originale care aparţin lui α_p. În mod similar vom defini $B_1, \ldots, K_1$.

Acum, dacă într-o propoziţie arbitrară, construită din predicatele $A_0, B_0, \ldots, K_0$ cu ajutorul simbolurilor logice, se înlocuiesc A_0 cu A_1, B_0 cu $B_1, \ldots,$ K_0 cu K_1 iar ca valori ale variabilelor individuale în locul obiectelor iniţiale se iau clasele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ şi fiecare obiect individual care poate să apară în propoziţie se înlocuieşte cu clasa căreia-i aparţine, atunci propoziţia trece în una cu aceeaşi valoare de adevăr.

Adevărul acestei aserţiuni este imediat sesizabil în cazul în care propoziţia la care ne referim nu conţine cuantificatori universali şi existenţiali. În cazul general ea se demonstrează scriind propoziţia în forma normală iar din valabilitatea ei pentru o formulă prefixată cu m cuantificatori se conchide asupra valabilităţii ei pentru $m + 1$ cuantificatori.

Acum, din această teoremă rezultă, în particular, că acea propoziţie falsă, care conform presupunerii noastre rezultă din formula dată prin înlocuirea variabilelor predicative $A, B, \ldots, K$ cu predicatele $A_0, B_0, \ldots, K_0$, trece într-o altă propoziţie falsă dacă predicatele $A_0, B_0, \ldots, K_0$ le înlocuim cu $A_1, B_1, \ldots, K_1$ iar ca valori pentru variabilele individuale luăm clasele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Aşadar, decizia trebuie s-o facem doar pentru cazul în care avem în vedere cel mult 2^k obiecte, aşadar un număr finit de obiecte. Pentru acest caz însă, aşa cum am văzut, decizia se poate efectua printr-un procedeu finit.

Acum, dacă vom considera din nou formule în care apar variabile predicative arbitrare, atunci o procedură de decizie pentru validitatea universală a acelor formule în care *prefixul constă doar din cuantificatori universali, sau doar din cuantificatori existenţiali, sau în care toţi cuantificatorii universali preced toţi cuantificatorii existenţiali, poate fi găsită cu uşurinţă.*

Să considerăm mai întâi o formulă de primul tip, aşadar o formulă de forma

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_m)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

în care $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nu mai conţine niciun cuantificator universal sau existenţial. *Această formulă este universal validă dacă şi numai dacă ea este universal validă într-un domeniu cu m indivizi.*

Fiindcă dacă formula n-ar fi validă într-un domeniu cu un număr de indivizi mai mare decât m, atunci ar exista în acest domeniu elementele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ şi predicatele individuale, pentru care

$$\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

devine una falsă. Însă în acest caz, cum de-ndată se poate constata, n-am avea validitatea universală în domeniul $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Acum, o formulă

$$(Ex_1)\ldots(Ex_m)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m),$$

în care prefixul constă doar din cuantificatori existenţiali, este universal validă dacă validitatea ei universală are loc într-un domeniu cu doar un singur individ.

Fiindcă dacă formula de mai sus nu este universal validă, atunci nu-i validă universal nici formula

$$(Ex)\mathfrak{A}(x, x, \ldots, x),$$

care reprezintă o aserţiune mai tare. Într-un domeniu există aşadar un element a şi predicate individuale pentru care $\mathfrak{A}(a, a, \ldots, a)$ devine o propoziţie falsă. Şi astfel n-am avea nici validitatea universală în domeniul cu singurul element a.

În acelaşi mod simplu se poate arăta şi că formulele

$$(x_1)\ldots(x_m)(Ey_1)\ldots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n),$$

în care toţi cuantificatorii universali preced toţi cuantificatorii existenţiali, sunt universal valide dacă validitatea universală are loc într-un domeniu cu m indivizi. Respectiv, vom construi disjuncţia tuturor

formulelor posibile

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}),$$

care rezultă din $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ înlocuind $y_1, \dots, y_n$, într-un mod arbitrar, cu variabile din şirul $x_1, \dots, x_m$. Această disjuncţie o vom denota cu $\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m)$. Evident, pentru un domeniu cu m indivizi, din validitatea universală a formulei

$$(x_1)\dots(x_m)(Ey_1)\dots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

rezultă validitatea universală a formulei

$$(x_1)\dots(x_m)\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m)$$

şi deci şi validitatea universală pentru orice domeniu a formulei

$$(x_1)\dots(x_m)\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m).$$

Însă, întrucât $(x_1)\dots(x_m)\mathfrak{B}(x_1, \dots, x_m)$ reprezintă o propoziţie mai tare decât

$$(x_1)\dots(x_m)(Ey_1)\dots(Ey_n)\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

cu aceasta aserţiunea este demonstrată.[23]

Dintre alte cazuri speciale soluţionale ale problemei deciziei, în care, de altfel, scopul nu mai este atins cu mijloace simple de acest gen, mai menţionăm următorul. Pentru formule care au un prefix de forma

$$(x_1)\dots(x_m)(Ey_1)(Ey_2)(z_1)\dots(z_n)$$

o procedură de decizie pentru validitatea universală poate fi de asemenea dată.[24]

[23]Cazurile speciale, menţionate mai la urmă, ale problemei deciziei, şi-au găsit rezolvarea în lucrarea lui P. Bernays şi M. Schönfinkel, *Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik*, Math. Ann. Vol. 99(1928).

[24]Comp. K. Gödel, *loc. cit.* (Prezentare preliminară deja în Erg. Wien. Math. Koll. Vol. 2(1932)). L. Kalmár, *Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten*, Math. Ann. Vol. 108(1932). K. Schütte, *Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik*, Math. Ann. Vol. 109(1934). *Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln*,

Şi în acest caz, decizia asupra validităţii universale în general se poate reduce la decizia asupra validităţii universale pentru un domeniu de invidizi finit, fixat. Cu aceste rezultate sunt epuizate însă şi tipurile de prefixe pentru care, în acest mod, se poate ajunge la decizia cu privire la validitatea universală. Căci, pentru toate celelalte prefixe se pot găsi formule care sunt universal valide în toate domeniile cu un număr finit de indivizi, nu însă şi în domeniile cu un număr infinit de indivizi.[25]

Acum, cât priveşte o soluţie generală a problemei deciziei, căutarea unei astfel de soluţii, potrivit investigaţiilor lui A. Church, bazate pe lucrările lui Gödel, trebuie considerată ca fiind fără speranţă.[26] Rezultatele acestor cercetări nu pot fi expuse în detaliu în limitele acestei cărţi. Să remarcăm doar faptul că o metodă generală de decizie ar consta într-o anumită procedură recursivă pentru formulele invididuale, care pentru fiecare formulă livrează, în final, valoarea "adevărat" sau "fals". Existenţa unei proceduri recursive de acest gen este însă respinsă prin opera lui Church; cel puţin, recursiile necesare n-ar cădea sub tipul general de recursie elaborat de Church, prin care conceptul intuitiv, oarecum vag al recursiei şi-a găsit o anumită precizare formală.

Pentru a evita erorile, să remarcăm faptul că imposibilitatea unei proceduri generale de decizie nu înseamnă că se pot găsi anumite formule a căror validitate universală ar fi demonstrabil nedecidabilă. Căci prezumtiva existenţă a unei demonstraţii de acest gen ar genera de-ndată

Math. Ann. Vol. 110(1934). Pentru cazul în care prefixul de mai sus conţine doar un cuantificator existenţial, în loc de doi, soluţia a fost dată anterior de W. Ackermann şi Th. Skolem. Comp. W. Ackermann, *Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke*, Math. Ann. Vol. 100(1928). Th. Skolem, *Über die mathematische Logik*, Norsk Mat. Ann. Tidskr. Vol. 10(1928). Un caz special de ultimul gen a fost deja tratat în lucrarea menţionată în nota de subsol 1 de mai sus.

[25]Comp. prima din lucrările lui K. Schütte, menţionate în nota de subsol precedentă.

[26]A. Church, *An unsolvable problem of elementary number theory*. Am. J. of Math. Vol. 58(1936). *A note on the Entscheidungsproblem; Correction to a note on the Entscheidungsproblem*, J. Symb. Logic Vol. 1(1936).

o contradicţie. Dintr-o astfel de demonstraţie ar rezulta o demonstraţie că formula n-ar fi derivabilă din sistemul axiomatic al §5. Însă prin teorema completitudinii din §10 s-ar putea atunci demonstra satisfiabilitatea negaţiei acestei formule. Şi deci, la urma urmei, validitatea universală ar fi decidabilă, respectiv în sens negativ. În orice caz, sarcina de a extinde clasa formulelor pentru care problema deciziei este rezolvată rămâne aşadar una profitabilă şi semnificativă.

CAPITOLUL 4

Calculul extins al predicatelor

1. Calculul predicatelor de ordinul doi

La o extensie a calculului restrâns al predicatelor sau cum mai este el numit, calculul predicatelor de ordinul întâi, ajungem luând în considerare faptul că formalismul acestui calcul, evident, nu este unul închis în el însuşi. Astfel, putem exprima faptul că o formulă reprezintă o propoziţie adevărată pentru toate valorile variabilelor predicative care apar în ea; nu suntem însă în stare să exprimăm opusul acestei aserţiuni. Căci dacă punem bara negaţiei peste întreaga formulă, atunci acest lucru înseamnează acum că formula trebuie să fie o propoziţie falsă pentru toate valorile variabilelor predicative. Există însă posibilitatea ca o formulă să reprezinte o aserţiune care nu este nici adevărată pentru toate valorile variabilelor predicative şi nici falsă pentru toate valorile variabilelor predicative. De exemplu, formula $(x)F(x)$ nu este desigur universal validă pentru orice domeniu de indivizi, însă tot astfel stau lucrurile şi cu formula $\overline{(x)F(x)}$. Pentru a exprima că formula $(x)F(x)$ nu este universal validă ar trebui să avem un cuantificator existenţial pentru predicate.

Aşadar, drept extensie naturală a calculului predicatelor de ordinul întâi se recomandă *să aplicăm cuantificatorul universal şi cel existenţial şi variabilelor propoziţionale şi celor predicative şi să deosebim între variabilele libere şi cele legate de acest gen.*

Conceptul de formulă logică, aşa cum a fost el definit în §4, are acum parte de o extensie corespunzătoare. Ajungem astfel la un *calcul al predicatelor de ordinul doi.*

Câteva exemple vor ilustra capacitatea sporită de expresie. Formula

$$(P)(x)(P(x) \vee \overline{P}(x))$$

spune că $(x)(P(x) \vee \overline{P}(x))$ are loc pentru orice predicat P. Formula

$$(A)(F)((x)(A \to F(x)) \sim (A \to (x)F(x))$$

exprimă faptul că relaţia dintre propoziţii şi predicate, definită prin

$$(x)(A \to F(x)) \sim (A \to (x)F(x)),$$

are loc pentru propoziţii şi predicate arbitrare.

Un caz de acelaşi fel îl găsim în *formularea simbolică a principiului inducţiei complete*. Conţinutul acestui principiu se poate exprima în felul următor:

"Dacă un predicat are loc despre numărul 1 şi dacă din faptul că el are loc despre un număr oarecare rezultă că are loc şi despre succesorul său, atunci predicatul are loc despre orice număr."

Dacă introducem simbolul $Seq(x, y)$ pentru relaţia unui număr cu succesorul său, atunci principiul îl putem exprima în aşa fel încât

$$\{P(1)\&(x)(y)[P(x)\&Seq(x, y) \to P(y)]\} \to (x)P(x)$$

o postulăm ca fiind o formulă universal validă.

Acum, dacă prin simbolizare vrem să exprimăm explicit şi faptul că formula are loc pentru toate predicatele P, atunci formula se poate prefixa cu cuantificatorul universal (P).

Un alt caz caracteristic îl constituie *definiţia identităţii.* Relaţia de identitate se poate reduce definţional la relaţiile logice de bază, stipulând că x este identic cu y dacă orice predicat care revine lui x revine şi lui y, şi invers. În sensul acestei definiţii simbolul identităţii, $\equiv (x, y)$, îl vom înţelege ca o abreviere pentru expresia

$$(F)(F(x) \sim F(y)).$$

În cazurile menţionate utilizarea cuantificatorului universal, deşi oportună, nu este însă una esenţială. Există totuşi cazuri în care utilizarea cuantificatorului universal este necesară, dacă nu vrem să renunţăm la importante posibilităţi de expresie.

Dacă, de exemplu, vrem să exprimăm faptul că orice predicat $R(x,y)$, echivalent cu identitatea, are şi proprietatea simetriei, atunci acest lucru trebuie scris în felul următor:

$$(R)\{(x)(y)[R(x,y) \sim (F)(F(x) \sim F(y))] \to (x)(y)(R(x,y) \to R(y,x)).$$

Aici cuantificatorul universal (F) nu poate fi omis, fără ca sensul expresiei să se schimbe.

Similar, aşa cum am arătat mai sus, cuantificatorul universal este indispensabil dacă despre o anumită expresie trebuie să spunem că nu este o formulă adevărată pentru toate valorile variabilelor predicative care apar în ea. Pentru a exprima, să zicem, că $(x)(y)F(x,y)$ nu este o formulă universal validă putem utiliza formula

$$\overline{(F)}(x)(y)F(x,y)$$

sau formula echivalentă

$$(EF)(Ex)(Ey)\overline{F}(x,y).$$

Similar stau lucrurile cu multe teoreme ale logicii, care sunt aserţiuni generale despre propoziţii şi predicate; de exemplu, teorema potrivit căreia pentru orice propoziţie X există o propoziţie Y astfel încât dintre cele două propoziţii una şi numai una este adevărată (i.e., teorema despre existenţa contradictoriei unei propoziţii). În simbolismul extins aceasta poate fi redată în felul următor:

$$(X)(EY)(X \vee Y \& \overline{X \& Y}).$$

Cu simbolismul de până acum, dimpotrivă, această teoremă n-ar fi putut fi redată.

Prin extensia simbolismului suntem în stare şi să formulăm simbolic probleme şi soluţiile lor, pentru care până acum trebuia să apelăm la o descriere intuitivă, ocolitoare. Să ne amintim, de exemplu, de argumentele de care ne-am prevalat în §8, capitolul întâi. Rezultatele găsite acolo

se pot reda prin următoarele formule:

$$(X)(A_1X\&A_2\overline{X}) \sim A_1\&A_2,$$
$$(EX)(A_1X\&A_2\overline{X}) \sim A_1 \vee A_2.$$

Aceste formule indică *o regulă prin care o expresie care conţine cuantificatori pentru variabile propoziţionale se poate înlocui cu o expresie echivalentă în care cuantificatorii nu mai apar*. Respectiv, se dezvoltă expresia succesiv în raport cu variabila aparţinătoare cuantificatorului aflat cel mai dinăuntrul formulei şi se elimină această variabilă în acord cu regula eliminării exprimată în formule. De exemplu, din

$$(X_1)(X_2)(A_1X_1X_2\&A_2X_1\overline{X}_2\&A_3\overline{X}_1X_2\&A_4\overline{X}_1\overline{X}_2),$$

prin eliminarea cuantificatorului (X_2), se obţine mai întâi

$$(X_1)((A_1\&A_2)X_1\&(A_3\&A_4)\overline{X}_1)$$

iar apoi

$$A_1\&A_2\&A_3\&A_4.$$

Această *regulă a eliminării*, formulabilă acum simbolic, ne permite să determinăm adevărul, respectiv falsitatea formulelor în care apar doar variabile propoziţionale şi cuantificatorii aferenţi. De exemplu, în formula mai sus menţionată

$$(X)(EY)(XY\&\overline{X\&Y})$$

dezvoltăm mai întâi $XY\&\overline{X\&Y}$ în raport cu Y. Se obţine

$$(X)(EY)(XY\&\overline{X}\ \overline{Y}).$$

Prin eliminarea cuantificatorului aflat cel mai dinăuntrul formulei obţinem

$$(X)(X\overline{X}).$$

$X\overline{X}$ este însă o expresie universal vaidă, şi deci $(X)(EY)(XY\&\overline{X\&Y})$ este o formulă adevărată.

Problema deciziei pentru calculul restrâns al predicatelor, în ambele forme ale sale, îşi găseşte acum formularea simbolică. Validităţii universale respectiv satisfiabilităţii unei formule, să zicem

$$(Ex)(y)(F(x,x) \vee \overline{F}(y,y) \vee G(x,y)),$$

într-un domeniu de indivizi îi corespunde, în calculul extins, adevărul formulei

$$(F)(G)(Ex)(y)(F(x,x) \vee \overline{F}(y,y) \vee G(x,y))$$

respectiv

$$(EF)(EG)(Ex)(y)(F(x,x) \vee \overline{F}(y,y) \vee G(x,y))$$

pentru acest domeniu.

În interpretarea formulelor logice putem întotdeauna considera formulele care nu conţin variabile libere de vreun fel, fiindcă variabilele libere pot fi eliminate prefixând formula cu cuantificatorii universali corespunzători. Şi deci în calculul de ordinul doi nu poate fi vorba despre validitatea universală sau satisfiabilitatea formulelor în sensul de până acum. Totuşi, doar prin acest simbolism sensul formulelor nu este încă fixat în mod unic, deoarece încă nu ştim care este domeniul de indivizi care trebuie luat în considerare. De exemplu,

$$(EF)(Ex)(Ey)(F(x)\&\overline{F}(y))$$

reprezintă o propoziţie falsă dacă domeniul de indivizi constă dintr-un singur element; în caz contrar însă ea reprezintă întotdeauna o propoziţie adevărată.

Prin formule *universal valide* (identice) ale calculului vom înţelege acele formule care reprezintă propoziţii adevărate pentru o alegere arbitrară a domeniului de indivizi. În acest caz, evident, conceptul validităţii universale se referă strict la alegeri arbitrare ale domeniilor de indivizi şi nu la alegeri arbitrare de propoziţii şi predicate. Corespunzător, satisfiabile se pot numi acele formule astfel încât există un domeniu de indivizi pentru care formula generează o propoziţie adevărată. Şi în acest caz validitatea universală a unei formule şi nesatisfibilitatea negaţiei ei sunt echivalente.

Clasa formulelor universal valide include toate formulele universal valide ale calculului restrâns al predicatelor, însă şi alte formule. Dacă $\equiv (x, y)$, ca mai înainte, reprezintă o abreviere pentru $(F)(F(x) \sim F(y))$, adică pentru predicatul identităţii, atunci

$$(x) \equiv (x, x); \;\; (x)(y)(\equiv (x, y) \rightarrow \equiv (y, x))$$

sunt formule universal valide. Alte exemple sunt

$$(EF)(Ex)F(x) \text{ şi } (F)(EG)(x)(y)(F(x, y) \vee \overline{G}(x, y)).$$

Din clasa formulelor satisfiabile fac parte toate formulele care rezultă din formulele satisfiabile ale calculului restrâns al predicatelor prin prefixarea lor cu cuantificatori existenţiali pentru predicate, fără ca în acest fel clasa formulelor satisfiabile să fie epuizată. De exemplu,

$$(F)((Ex)F(x) \rightarrow (x)F(x))$$

este de asemenea o formulă satisfiabilă.

Următoarea întrebare ar fi dacă, similar calculului predicatelor de ordinul întâi, şi aici poate fi dat un sistem de formule logice primitive, din care toate celelalte formule universl valide pot fi obţinute progresiv, în acord cu anumite reguli. Să remarcăm totodată că *un sistem axiomatic complet pentru formulele universal valide ale calculului predicatelor de ordinul doi nu există.* Mai degrabă, aşa cum Gödel a arătat, pentru orice sistem de formule primitive şi reguli de deducţie se pot găsi formule universal valide care nu pot fi deduse.[1] Cu toate acestea, pentru cele mai multe scopuri, următorul sistem ar trebui să fie unul suficient.

Vom lua mai întâi toate formulele primitive şi regulile de deducţie ale calculului restrâns al predicatelor; însă în cazul regulilor de deducţie trebuie să avem îm vedere faptul că acum ele se aplică la un concept extins al formulei. Formulei primitive e) îi putem adăuga arbitrar de multe formule primitive de forma

$$(F)\mathfrak{A}(F) \rightarrow \mathfrak{A}(G).$$

[1]K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, Mh. Math. Physik, Vol. 38(1931).

Aici $\mathfrak{A}(F)$ este o formulă care conţine variabila predicativă liberă F, însă nu conţine G, iar $\mathfrak{A}(G)$ este formula care rezultă din $\mathfrak{A}(F)$ prin substituţia în $\mathfrak{A}(F)$ a lui G pentru F, în acord cu Regula $\alpha 3$). Similar, putem adăuga ca formule primitive un număr arbitrar de formule de forma

$$\mathfrak{A}(G) \to (EF)\mathfrak{A}(F).$$

La acestea se adaugă formulele primitive strâns înrudite cu axioma alegerii din teoria mulţimilor. Prima din aceste formule este

g) $$(EF)\{(x)[(Ey)G(x,y) \to (Ey)(F(x,y)\&G(x,y))]$$

$$\&(x)(y)(z)[F(x,y)\&F(x,z) \to \equiv (y,z)]\}.$$

Sensul acestei formule este următorul. Printr-un predicat $G(x,y)$, acelor x pentru care există un y cu proprietatea $G(x,y)$ le sunt asociate anumite valori ale lui y. Formula noastră primitivă asertează că pentru orice astfel de x se poate selecta una din valorile asociate astfel încât asocierea să fie univocă. F reprezintă această asociere univocă.

Apoi, fie $\mathfrak{A}(x, F(.,..))$ o formulă care conţine variabila individuală liberă x şi variabila predicativă liberă F cu n locuri pentru argumente. Presupunem că $\mathfrak{A}(x, G(x,...))$ denotă formula care rezultă din $\mathfrak{A}(x, F(...))$ înlocuind, în acord cu Regula $\alpha 3$), fiecare subexpresie $F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ cu $G(x, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, unde G este o variabilă predicativă cu $n+1$ locuri pentru argumente. Atunci, şi formula

h) $$(x)(EF)\mathfrak{A}(x, F(\ldots)) \to (EG)(x)\mathfrak{A}(x, G(x,\ldots))$$

se poate lua ca formulă primitivă. Adevărul acestei formule îl putem sesiza în felul următor. Dacă pentru orice x există un F astfel încât $\mathfrak{A}(x, F(\ldots))$ are loc, atunci pentru orice x putem selecta unul dintre aceşti F, pe care-l vom numi F^x. Acum, dacă definim G astfel încât

$$(x)(y_1)(y_2)\ldots(y_n)(G(x, y_1, \ldots, y_n) \sim F^x(y_1, \ldots, y_n))$$

are loc, atunci am găsit un G de genul postulat prin formula primitivă h).

Regulile de deducţie rămân aceleaşi ca regulile din calculul restrâns al predicatelor, doar că Regulile $\gamma 1$), $\gamma 2$), δ) sunt acum extinse în aşa fel încât ele sunt valabile şi pentru variabilele predicative.

Din acest sistem reiese (lucru pe care nu trebuie să-l detaliem aici) că rezultatele pe care anterior le-am dedus pentru calculul restrâns al predicatelor se pot, corespunzător, transfera aici. De exemplu, teorema despre forma normală prenexă, principiul dualităţii, teorema despre construcţia contradictoriei unei formule rămân şi acum valabile. Similar, oricărei formule a calculului restrâns al predicatelor, care conţine variabile individuale, i se asociază o clasă de formule în care apar variabile predicative. Şi astfel, faptului că

$$(x)(F(x) \to G(x)) \to ((Ex)F(x) \to (Ex)G(x))$$

(Teorema 34) era o formulă demonstrabilă, îi corespunde acum demonstrabilitatea oricărei formule de forma

$$(F)(\mathfrak{A}(F) \to \mathfrak{B}(F)) \to (EF)\mathfrak{A}(F) \to (EF)\mathfrak{B}(F).$$

În demonstraţie trebuie doar să se repete demonstraţia pentru Teorema 34, cu modificările corespunzătoare. Acest lucru este valabil şi pentru toate celelalte formule ale calculului restrâns al predicatelor.

Prin *problema deciziei* pentru calculul de ordinul doi înţelegem problema de a decide pentru o formulă dată dacă este sau nu o formulă universal validă. Pentru forma mai tare, problema este aceea de a decide pentru care domenii de indivizi formula reprezintă o propoziţie adevărată şi pentru care nu. Întrucât problema deciziei pentru calculul de ordinul doi include problema pentru calculul de ordinul întâi, la o soluţie generală, cu atât mai mult, nu ne putem gândi.

Abstracţie făcând de cazurile care aparţin domeniului calculului restrâns al predicatelor şi care au fost soluţionate acolo, avem ca unic rezultat special important faptul că decizia pentru domeniul formulelor care conţin doar predicate *monadice* a fost soluţionată în mod complet. Demonstraţia a fost dată în lucrările lui Löwenheim, Skolem şi Behmann,

menţionate deja în §12 al capitolului precedent. Acestea conţin soluţia problemei deciziei în sensul ei mai tare.

Pentru prezentarea detaliată a procedurii de decizie ne vom referi la lucrarea de o claritate exemplară, elaborată de Behmann. Metoda utilizată o vom caracteriza totuşi pe scurt. Soluţia problemei deciziei pentru domeniul predicatelor monadice se bazează pe soluţia *problemei eliminării* pentru acest domeniu. Prin problema eliminării în general înţelegem următoarele. Fie dată o formulă $\mathfrak{A}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$, care conţine variabilele predicative libere $F, G_1, \ldots, G_m$, variabilele individuale libere $x_1, x_2, \ldots, x_k$ şi, eventual, variabile individuale legate, însă nu conţine nicio variabilă predicativă legată. Ne întrebăm acum dacă se poate găsi o formulă $\mathfrak{B}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$, care de asemenea nu conţine nicio variabilă predicativă legată, astfel încât

$$(F)\mathfrak{A}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k) \sim \mathfrak{B}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$$

sau, echivalent

$$(EF)\overline{\mathfrak{A}}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k) \sim \overline{\mathfrak{B}}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$$

este o formulă universal validă de ordinul doi. Dacă aşa stau lucrurile, atunci în orice formulă componenta

$$(F)\mathfrak{A}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k),$$

respectiv

$$(EF)\overline{\mathfrak{A}}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k),$$

poate fi înlocuită cu

$$\mathfrak{B}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k),$$

respectiv

$$\overline{\mathfrak{B}}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k).$$

Variabila predicativă F o putem aşadar elimina dintr-o astfel de formulă.

Relaţia cu problema deciziei este clară. Dacă avem o formulă a calculului predicatelor pentru care trebuie să decidem, atunci eliminăm mai întâi variabilele predicative libere, prefixând formula cu cuantificatorii

universali corespunzători, iar apoi, sub ipoteza soluţionării problemei deciziei, eliminăm succesiv variabilele predicative, începând dinăuntrul formulei, astfel încât, ca rezultat final, obţinem valoarea "adevărat" sau "fals" sau poate o condiţie numerică (i.e., pe numărul de indivizi).

Să clarificăm printr-un exemplu reducerea formulelor prin eliminare. Fie formula

$$(F)\{(Ex)F(x) \vee (EG)[(x)(G(x) \sim \overline{F}(x))\&(x)G(x)]\}.$$

Remarcăm mai întâi faptul că formula

$$(EF)(x)(A(x) \vee F(x)\&B(x) \vee \overline{F}(x)) \sim (x)(A(x) \vee B(x)),$$

care constituie un rezultat fundamental de eliminare, este o formulă universal validă, întrucât partea stângă a echivalenţei se poate transforma în

$$(EF)(x)\{(\overline{F}(x) \to A(x))\&(F(x) \to B(x))\}.$$

Cu ajutorul acestei formule putem să eliminăm variabila predicativă G din formula noastră iniţială, Căci putem înlocui partea din formulă

$$(x)(G(x) \sim \overline{F}(x))\&(x)G(x),$$

care constituie domeniul de acţiune al cuantificatorului (EG) [cf. (29) din Cap. 1, §2, Teorema 30 din Cap. 3, §6], cu

$$(x)(G(x) \vee F(x)\&\overline{G}(x) \vee \overline{F}(x)\&G(x))$$

sau cu

$$(x)(G(x)\&\overline{F}(x) \vee \overline{G}(x))$$

iar apoi prin

$$(x)[(F(x)\&\overline{F}(x)) \vee G(x)\&\overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)].$$

Acum, în acord cu formula fundamentală de eliminare, de mai sus, are loc

$$(EG)(x)[(F(x)\&\overline{F}(x)) \vee G(x)\&\overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)] \sim (x)[(F(x)\&\overline{F}(x)) \vee \overline{F}(x)].$$

$$(x)[(F(x)\&\overline{F}(x)) \vee \overline{F}(x)]$$

se poate înlocui cu $(x)\overline{F}(x)$. Formula noastră iniţială

$$(F)\{(Ex)F(x) \vee (EG)[(x)(G(x) \sim \overline{F}(x))\&(x)G(x)]\},$$

după eliminarea variabilei predicative G, este aşadar transformată în

$$(F)\{(Ex)F(x) \vee (x)\overline{F}(x)\}.$$

Această din urmă formulă, în care domeniul de acţiune al cuantificatorului (F) are forma $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$, ne permite să recunoaştem de-ndată că formula noastră iniţială este o formulă universal validă.

Aşa cum am remarcat mai sus, problema eliminării se poate soluţiona în mod complet, dacă apar exclusiv predicate monadice. Întrucât procedura eliminării reprezintă singura metodă de relevanţă mai generală în tratarea problemei deciziei, este sugestivă încercarea de a căuta o procedură a eliminării şi în cazurile în care admitem predicate diadice şi cu mai multe locuri pentru argumente. De fapt, pentru formule cu o anumită structură executarea eliminării este posibilă. Numeroase rezultate izolate de acest gen se găsesc în al treilea volum din "Vorlesungen über die Algebra der Logik", a lui Ernst Schröder. Din păcate, s-a arătat că se pot găsi formule pentru care un rezultat de eliminare, în sensul definit mai sus, nu mai există, aşa că problema eliminării, ca problemă, trebuie să dobândească în general o formulare mai cuprinzătoare.[2] Relaţiile cu problema deciziei devin atunci mai complicate.

2. Introducerea predicatelor de predicate. Tratarea logică a conceptului de număr

Pentru interpretarea intuitivă, pe care până acum am pus-o la baza calculului predicatelor, esenţial era faptul că am separat strict propoziţiile

[2]Comp. W. Ackermann, *Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik*, Math. Ann. Vol. 110(1934), *Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik*, Math. Ann. Vol. 111(1935).

şi predicatele de obiectele care figurează ca valori ale argumentelor predicatelor. Acum nu ne împiedică însă nimic *să considerăm înseşi predicatele şi propoziţiile ca obiecte care servesc drept argumente ale predicatelor.*

Să considerăm, de exemplu, o expresie logică de forma $(x)(A \to F(x))$. Aceasta poate fi înţeleasă ca un predicat $P(A, F)$, al cărui prim loc pentru argumente este ocupat de o propoziţie A iar locul al doilea de un predicat monadic F.

O propoziţie falsă A se află cu orice F în relaţia $P(A, F)$; o propoziţie adevărată A doar cu acei F pentru care $(x)F(x)$ are loc.

Alte exemple sunt date de proprietăţile *reflexivităţii*, *simetriei* şi *tranzitivităţii* predicatelor diadice. Acestor proprietăţi le corespund trei predicate: $\mathrm{Ref}(R)$, $\mathrm{Sim}(R)$, $\mathrm{Tr}(R)$, al căror argument R este un predicat diadic. Simbolic, aceste trei proprietăţi se exprimă astfel:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ref}(R): \quad (x)R(x, x)\\
&\mathrm{Sim}(R): \quad (x)(y)(R(x, y) \to R(y, x))\\
&\mathrm{Tr}(R): \quad (x)(y)(z)[(R(x, y) \& R(y, z)) \to R(x, z)].
\end{aligned}$$

Toate cele trei proprietăţi revin predicatului $\equiv (x, y)$ (x este identic cu y), predicatului $< (x, y)$, dimpotrivă, îi revine doar proprietatea tranzitivităţii. Aşadar, formulele $\mathrm{Ref}(\equiv)$, $\mathrm{Sim}(\equiv)$, $\mathrm{Tr}(\equiv)$, $\mathrm{Tr}(<)$ sunt propoziţii adevărate, pe când $\mathrm{Ref}(<)$ şi $\mathrm{Sim}(<)$ sunt propoziţii false.

Un predicat de predicate diadic este *echivalenţa*, $\mathrm{Echiv}(F, G)$, definit prin expresia $(x)(F(x) \sim G(x))$, şi care constă în faptul că predicatele F şi G au loc sau nu au loc simultan pentru aceleaşi valori ale argumentelor. Alte predicate de predicate diadice sunt *incompatibilitatea*, $\mathrm{Inc}(F, G)$, şi *implicaţia*, $\mathrm{Imp}(F, G)$, definite simbolic prin:

$$\begin{aligned}
&(x)(\overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)),\\
&(x)(F(x) \to G(x)).
\end{aligned}$$

Fireşte, prin aceste consideraţii nu are încă loc o extensie a simbolizării, întrucât predicatele de predicate de mai sus se pot reda cu mijloacele calculului de până acum, caz în care formule precum $\mathrm{Ref}(R)$, $\mathrm{Sim}(R)$

etc. trebuie înţelese doar ca abrevieri. Extensia survine abia atunci când sunt introduse variabile pentru predicate de predicate, în raport cu care predicatele individuale, mai sus menţionate, reprezintă valori particulare. În cele ce urmează astfel de variabile le vom utiliza doar ocazional, întrucât construcţia sistematică a calculului extins va veni abia mai târziu. Însă, deja în acest paragraf şi în cel care urmează vrem să ne convingem de avantajele pe care introducerea predicatelor de predicate le aduce cu sine.

Prima aplicaţie importantă rezultă din *investigaţia logică a conceptului de număr*. Un număr nu este un obiect în sens propriu, ci o proprietate. Indivizii cărora le revine numărul ca proprietate nu pot fi lucrurile numărate însele, deoarece fiecare dintre lucruri este doar unul, aşa că un număr diferit de 1 n-ar putea să apară nicidecum în acest mod. Dimpotrivă, numărul poate fi înţeles ca o proprietate a acelui concept sub care indivizii număraţi sunt reuniţi. De exemplu, faptul că numărul continentelor este cinci nu poate fi exprimat spunând că fiecărui continent îi revine ca proprietate numărul cinci; în schimb, este o proprietate a predicatului "a fi continent" faptul că el are loc pentru exact cinci obiecte.

Numerele apar aşadar ca proprietăţi ale predicatelor, iar pentru calculul nostru *un număr definit este reprezentat ca un predicat individual de predicate*. Importanţa acestei reprezentări a numerelor se bazează pe faptul că predicatele de predicate, care reprezintă numere, se pot exprima în mod complet cu ajutorul simbolurilor logice. Şi astfel devine posibilă includerea teoriei numerelor în logică. Pentru numerele 0, 1, 2, i.e., pentru predicatele de predicate $0(F)$, $1(F)$, $2(F)$, vom da aici expresiile

$$0(F): \ \overline{(Ex)}F(x).$$

("Nu există niciun x pentru care F are loc.")

$$1(F): \ (Ex)[F(x)\&(y)(F(y) \rightarrow \equiv (x, y))].$$

("Există un x pentru care $F(x)$ are loc, şi orice y pentru care $F(y)$ are loc este identic cu acest x.")

$2(F) : (Ex)(Ey)\{\overline{\equiv}(x,y)\&F(x)\&F(y)\&(z)[F(z) \rightarrow\equiv (x,z)\vee \equiv (y,z)]\}$.
("Există doi x şi y diferiţi, pentru care F are loc şi orice z pentru care $F(z)$ are loc este identic fie cu x, fie cu y.")

Echivalenţa numerică a două predicate F şi G poate fi înţeleasă ca un predicat individual de predicate $\mathrm{En}(F,G)$. Întrucât echivalenţa numerică a lui F şi G nu înseamnă nimic altceva decât că obiectele despre care F are loc şi obiectele despre care G are loc pot fi puse într-o corespondenţă unu-la-unu, şi astfel $\mathrm{En}(F,G)$ se poate defini prin următoarea expresie:

$$(ER)\{(x)[F(x) \rightarrow (Ey)(R(x,y)\&G(y))]\&(y)[G(y) \rightarrow \\ \rightarrow (Ex)(R(x,y)\&F(x))]\&(x)(y)(z)[(R(x,y)\&R(x,z) \rightarrow \\ \rightarrow\equiv (y,z))\&(R(x,z)\&R(y,z) \rightarrow\equiv (x,y))]\}.$$

Adunarea numerelor se poate reduce la disjuncţia de predicate. De fapt, dacă F şi G sunt predicate incompatibile şi predicatului F îi revine numărul m iar predicatului G îi revine numărul n, atunci predicatului $F \vee G$ îi corespunde numărul $m+n$.

Pe baza acestui concept al adiţiei ecuaţii numerice precum

$$1+1=2, \quad 2+3=5$$

devin propoziţii pur logice, demonstrabile. Ecuaţia $1+1=2$, de exemplu, se redă prin formula

$$(F)(G)((\mathrm{Inc}(F,G)\&1(F)\&1(G)) \rightarrow 2(F \vee G)),$$

al cărei caracter universal valid este evident, dacă atât pentru predicatul de predicate Inc cât şi pentru predicatele de predicate 1, 2 se substituie expresiile care le definesc.

Şi conceptul general de număr poate fi elaborat cu ajutorul mijloacelor logice. Dacă un predicat de predicate $\Phi(F)$ trebuie să reprezinte un număr, atunci Φ trebuie să satisfacă următoarele condiţii:

Pentru două predicate echivalente numeric F şi G, Φ trebuie fie să aibă loc pentru ambele predicate, fie să nu aibă loc pentru niciunul. Apoi,

dacă două predicate F şi G nu sunt echivalente numeric, atunci Φ trebuie să aibă loc pentru cel mult unul dintre cele două predicate F şi G.

Exprimate formal, aceste condiţii pe Φ sunt:

$$(F)(G)\{(\Phi(F)\&\Phi(G) \rightarrow \mathrm{En}(F,G))\&[\Phi(F)\&\mathrm{En}(F,G) \rightarrow \Phi(G)]\}.$$

Întreaga expresie reprezintă o proprietate a lui Φ. Dacă, abreviat, vom denota această proprietate cu $\mathfrak{N}(\Phi)$, atunci vom putea de asemenea spune:

Un număr este un predicat de predicate Φ care posedă proprietatea $\mathfrak{N}(\Phi)$.

O dificultate apare fireşte atunci când ne întrebăm care sunt condiţiile sub care două predicate de predicate Φ şi Ψ, cu proprietăţile $\mathfrak{N}(\Phi)$ şi $\mathfrak{N}(\Psi)$ definesc acelaşi număr. Această condiţie constă în aceea că $\Phi(P)$ şi $\Psi(P)$ fie sunt adevărate despre aceleaşi predicate P, fie sunt false pentru aceleaşi predicate; aşadar, că are loc relaţia:

$$(P)(\Phi(P) \sim \Psi(P)).$$

Să presupunem acum că domeniul de indivizi pe care-l luăm ca bază constă dintr-un număr finit de obiecte. Atunci apare inconvenientul că toate numerele mai mari decât numărul obiectelor din domeniul de indivizi devin egale. Căci dacă acest număr este, să zicem, mai mic decât 10^{60} iar pentru Φ şi Ψ vom lua predicate de predicate care definesc numerele 10^{60} şi $10^{60}+1$, atunci nici Φ, nici Ψ nu se aplică niciunui predicat P. Relaţia

$$(P)(\Phi(P) \sim \Psi(P))$$

este astfel satisfăcută pentru Φ şi Ψ, i.e., Φ şi Ψ ar reprezenta acelaşi număr.

Pentru a evita această dificultate domeniul de indivizi trebuie asumat ca fiind infinit. Fireşte, procedând astfel, la o demonstraţie logică pentru existenţa unei totalităţi infinite vom renunţa aici.

De un interes special este şi modul în care, luând ca bază introducerea logică a conceptului de număr şi, fireşte, printr-o esenţială utilizare a

axiomei infinităţii, mai sus menţionată, axiomele teoriei numerelor devin teoreme demonstrabile ale logicii. În acest subiect nu vom putea însă intra aici în detaliu.[3] Remarcile făcute trebuiau doar să plaseze într-o lumină corectă capacitatea aplicativă a calculului extins.

3. Reprezentarea conceptelor fundamentale ale teoriei mulţimilor în calculul extins

Faptul că între teoria mulţimilor şi logica matematică există o strânsă corelaţie a putut fi sesizat deja în consideraţiile precedente, din cel de-al doilea capitol. Aceleaşi formule logice au putut fi interpretate după dorinţă, ca relaţii între clase sau ca relaţii între predicatele monadice, fără ca în cele două interpretări să fie implicate conexiuni logice diferite. Şi aici va fi posibil să interpretăm ca relaţii set-teoretice conexiunile logice exprimabile în calculul nostru.

Pentru a sesiza această corelaţie mai îndeaproape, întâi de toate vom avea în vedere mai exact relaţia mulţimilor cu predicatele în sens restrâns, i.e., cu predicatele cu un singur loc pentru argument. O mulţime fie este dată prin enumerarea elementelor ei, fie este definită ca sistemul acelor lucruri pentru care un anumit predicat are loc. Primul mod de definire a unei mulţimi, posibil doar pentru mulţimile finite, nu va trebui avut în vedere în mod special. Căci orice mulţime care se obţine prin enumerarea elementelor ei se poate defini şi cu ajutorul unui predicat. De exemplu, o mulţime care constă din trei indivizi a, b, c, poate fi definită ca mulţimea acelor lucruri x pentru care predicatul

$$\equiv (x, a) \vee \equiv (x, b) \vee \equiv (x, c)$$

are loc.

Vom considera aşadar orice mulţime ca fiind definită printr-un predicat. Va trebui să avem în vedere faptul că orice predicat determină în mod unic mulţimea care-i corespunde, i.e., mulţimea obiectelor pentru

[3]Pentru o tratare detaliată şi uşor comprehensibilă a acestei problematici, comp. B. Russell, *Einführung in die mathematische Philosophie.* München 1922.

care el are loc, însă unei anumite mulţimi date nu-i aparţine doar *un* singur predicat care-o defineşte; mai degrabă o mulţime poate fi definită prin predicate în diferite moduri. Astfel, mulţimea triunghiurilor echilaterale este aceeaşi cu mulţimea triunghiurilor echiunghiulare. Sau, un exemplu din afara matematicii: mulţimea rumegătoarelor aflate acum în viaţă coincide cu mulţimea paricopitatelor aflate acum în viaţă.

Condiţia necesară şi suficientă ca două predicate P şi Q să determine aceeaşi mulţime constă în faptul că cele două predicate sunt echivalente, adică în faptul că ele satisfac relaţia $\mathrm{Echiv}(P, Q)$, i.e., $(x)(P(x) \sim Q(x))$. În sensul teoriei mulţimilor predicatul de predicate $\mathrm{Echiv}(P, Q)$ nu este altceva aşadar decât identitatea lui P şi Q.

Aşa cum predicatele se pot considera ca mulţimi, tot astfel un predicat monadic de predicate $F(P)$ se poate interpreta ca o proprietate a mulţimilor. Pentru ca această interpretare să fie posibilă este necesar ca adevărul sau falsitatea lui F pentru un predicat P să fie determinate în mod unic prin mulţimea aparţinătoare lui P, şi potrivit consideraţiilor de mai sus, condiţia decisivă pentru acest lucru rezidă în faptul că propoziţiile, care sunt asociate predicatelor echivalente prin predicatul de predicate F, trebuie să fie simultan adevărate sau simultan false. Aşadar, pentru predicatul F trebuie să aibă loc relaţia simbolic redată prin

$$(P)(Q)\{\mathrm{Echiv}(P, Q) \rightarrow (F(P) \rightarrow F(Q))\},$$

pe care abreviat o vom denota cu $\mathfrak{M}(F)$.

Această condiţie este satisfăcută, de exemplu, de predicatele de predicate care reprezintă numere. Pe această proprietate a numerelor se bazează faptul că ele pot fi tratate şi ca predicate de mulţimi. În raport cu interpretarea lor ca proprietăţi ale predicatelor, interpretarea numerelor ca proprietăţi ale mulţimilor are avantajul că face evidentă invarianţa numărului în cazul înlocuirii unui predicat cu unul echivalent.

Din relaţia dintre mulţimi şi predicate rezultă apoi o conexiune între mulţimi de mulţimi şi predicate de predicate. Orice mulţime de

mulţimi este definită printr-o proprietate care revine tuturor mulţimilor aparţinătoare ei.

Să luăm acum două predicate de mulţimi, adică două predicate de predicate, $F(P)$ şi $G(P)$, care satisfac condiţia $\mathfrak{M}(F)$ şi $\mathfrak{M}(G)$. Acestor două predicate de mulţimi F şi G le corespunde aceeaşi mulţime de mulţimi dacă ambele predicate se aplică, respectiv nu se aplică aceloraşi mulţimi. Relaţia $(P)(F(P) \sim G(P))$ înseamnă aşadar că mulţimile de mulţimi care corespund lui F şi G sunt identice.

Interpretarea set-teoretică a calculului extins al predicatelor se poate extinde şi la predicate n-adice. Orice predicat $R(x, y)$ selectează din mulţimea tuturor perechilor posibile (x, y) o anumită mulţime de perechi ordonate, şi anume mulţimea acelor perechi pentru care $R(x, y)$ are loc. În cazul a două predicate, R_1 şi R_2, mulţimile aparţinătoare sunt identice dacă relaţia $\text{Ehiv}(R_1, R_2)$, i.e., $(x)(y)(R_1(x, y) \sim R_2(x, y))$, are loc. Dacă un predicat de predicate $F(R)$ trebuie să poată fi interpretat ca *predicat al mulţimilor* corespunzătoare, atunci el trebuie să satisfacă relaţia

$$(R_1)(R_2)\{\text{Echiv}(R_1, R_2) \to (F(R_1) \to F(R_2))\}.$$

Acest lucru este valabil, corespunzător, pentru predicate cu trei sau mai multe locuri pentru argumente.

Aşa cum rezultă din consideraţiile de mai sus, calculul extins admite la fel de bine atât o interpretare set-teoretică cât şi una pur logică. Teoria numerelor se poate trata întru totul în sensul interpretării set-teoretice. Am văzut deja că predicatele de predicate, care definesc numere, pot fi interpretate la fel de bine ca predicate de mulţimi. Mai mult, cum am spus mai înainte, două predicate de predicate, $\Phi(P)$ şi $\Psi(P)$, care reprezintă numere, dau acelaşi număr dacă între Φ şi Ψ are loc relaţia

$$(P)(\Phi(P) \sim \Psi(P)).$$

De aici rezultă însă că numerele se pot interpreta şi ca mulţimi de mulţimi. În interpretarea logică un număr era un predicat de predicate, care are loc despre toate predicatele echivalente numeric şi doar pentru

acestea. Echivalenţei numerice a predicatelor îi corespunde echivalenţa mulţimilor (echivalenţa înţeleasă aici în sensul uzual set-teoretic). De la conceptul logic de număr se ajunge la unul set-teoretic, potrivit căruia un număr nu este nimic altceva decât *mulţimea tuturor mulţimilor echivalente* cu o mulţime dată.

Vom vedea acum modul în care conceptele uzuale ale teoriei mulţimilor îşi găsesc expresia lor simbolică în acest calcul.

Dacă $P_1(x)$ şi $P_2(x)$ sunt predicate care definesc două mulţimi, atunci *reuniunea* lor este dată prin predicatul $P_1(x) \vee P_2(x)$. $P_1(x) \& P_2(x)$ reprezintă *intersecţia* lui P_1 şi P_2. Mulţimea P_1 este conţinută în P_2 sau P_1 este o *submulţime* a lui P_2 dacă $(x)(P_1(x) \to P_2(x))$ este o propoziţie adevărată. Două mulţimi P_1 şi P_2 sunt *echivalente* dacă elementele uneia dintre mulţimi pot fi puse într-o corespondenţă unu-la-unu cu elementele celeilalte. Expresia simbolică a acestui lucru este aceeaşi ca expresia simbolică pentru echivalenţa numerică a predicatelor.

Expresia

$$(x)(y)(z)([R(x,y)\&R(x,z) \to \equiv (y,z)]\&[R(x,z)\&R(y,z) \to \equiv (x,y)])$$

sau, abreviat $\mathrm{Unv}(R)$, înseamnă că relaţia $R(x,y)$, dacă are loc, este univocă de ambele părţi. Atunci expresia simbolică pentru echivalenţa (set-teoretică) a lui P_1 şi P_2 este:

$$(ER)\{(x)[P_1(x) \to (Ey)(R(x,y)\&P_2(y))]\&(y)[P_2(y) \to \\ \to (Ex)(R(x,y)\&P_1(x))]\&\mathrm{Unv}(R)\}.$$

Mulţimea tuturor submulţimilor unei mulţimi date, definită prin D, este reprezentată printr-un anumit predicat de predicate $\mathrm{Sb}(P)$ (sau, mai bine, $\mathrm{Sb}(P,D)$). Orice predicat P, pentru care $\mathrm{Sb}(P)$ are loc, trebuie să aibă proprietatea că toate elementele lui sunt şi elemente ale lui D. Invers, $\mathrm{Sb}(P)$ trebuie să aibă loc şi pentru orice predicat P cu această proprietate. Aşadar, $\mathrm{Sb}(P)$ este definit prin următoarea expresie:

$$(x)(P(x) \to D(x)).$$

Mai departe, presupunem că $F(P)$ reprezintă o mulţime arbitrară de mulţimi. Elementele x ale *reuniunii acestei mulţimi de mulţimi* pot fi caracterizate prin faptul că fiecare este un element al cel puţin unei mulţimi care aparţine lui P pentru care $F(P)$ are loc. Aşadar, ca expresie definitorie pentru reuniune se obţine

$$(EP)(F(P)\&P(x)).$$

Elementele *intersecţiei mulţimii de mulţimi* sunt caracterizate prin faptul că fiecare dintre ele este un element al fiecărei mulţimi P pentru care $F(P)$ are loc. Aşadar, intersecţia este reprezentată prin:

$$(P)(F(P) \to P(x)).$$

O mulţime P se numeşte *ordonată* dacă pentru elementele lui P este definit un predicat diadic, R, care nu este reflexiv dar este tranzitiv şi care, pentru orice x şi y diferiţi, are loc fie pentru perechea (x, y), fie pentru perechea (y, x). "Mulţimea P este ordonată prin predicatul R" este aşadar exprimată simbolic prin:

$$(x)(y)(z)\{[P(x)\&P(y)\&P(z)] \to [\overline{R}(x,x)\&(\equiv (x,y) \vee R(x,y) \\ \vee R(y,x))\&(R(x,y)\&R(y,z) \to R(x,z))]\}.$$

Abreviat, vom denota această formulă cu $\mathfrak{D}(P, R)$.

Mulţimea P se numeşte *bine-ordonată* prin predicatul R, dacă

$$\mathfrak{D}(P,R)\&(Q)\{(x)(Q(x) \to P(x)) \to (Ey)[Q(y)\&(z)(Q(z) \to \\ \to \equiv (y,z) \vee R(y,z))]\},$$

este o propoziţie adevărată.

În mod corespunzător, toate celelalte construcţii conceptuale utilizate în teoria mulţimilor îşi găsesc reprezentarea lor simbolică în calculul nostru.

4. Paradoxurile logice

În paragrafele precedente am văzut ce posibilităţi noi de expresie rezultă prin introducerea predicatelor de predicate. Orice formulă care conţine o variabilă predicativă liberă F poate fi înţeleasă ca un *predicat individual de predicate.* Mai departe, pot fi introduse variabile pentru predicate de predicate. O formulă care conţine o variabilă liberă de acest gen reprezintă un predicat individual, ale cărui argumente sunt predicate de predicate ş.a.m.d. Această construcţie poate fi continuată indefinit.

Aşadar, în afara obiectelor domeniului de indivizi putem avea ca obiecte în sens larg şi predicate, predicate de predicate ş.a.m.d. Acum se ridică întrebarea dacă aceste obiecte în sens larg nu se pot reuni, fără alte consideraţii, într-un singur domeniu de indivizi, astfel încât dincolo de predicate de indivizi, predicate de predicate de acest gen ş.a.m.d., nu se poate cumva vorbi şi despre predicate pur şi simplu, astfel încât orice predicat pentru noul domeniu de indivizi aparţine el însuşi, din nou, domeniului de indivizi. În acest caz un predicat ar trebui să se poată conţine şi pe el însuşi ca argument. Similar, cu o astfel de generalitate ar trebui înţeles şi conceptul de predicat de predicate ş.a.m.d.

Modul în care, plecând de la calculul restrâns al predicatelor, am ajuns la predicate de un nivel superior nu ne oferă niciun sprijin într-un demers de acest gen. Căci în consideraţiile paragrafului precedent am avut de-a face întotdeauna cu predicate de indivizi, predicate de predicate de indivizi de acest gen etc. Însă un astfel de concept general al predicatului, ce-i drept, ar corespunde utilizării imprecise a limbii.[4] Se va vedea însă de-ndată că un sistem logic de acest gen nici măcar nu satisface postulatul consistenţei. Contradicţiilor care apar, aşa-numitele *paradoxuri*, la care, de altfel, se poate ajunge şi independent de utilizarea simbolizării logice, li se poate da o interpretare logică în sens propriu sau una set-teoretică, în funcţie de dubla interpretare a calculului predicatelor. Unele din aceste contradicţii vor fi prezentate aici.

[4]În interpretarea set-teoretică a calculului această înţelegere corespunde teoriei naive a mulţimilor.

Fie $P(F)$ un predicat de predicate. Fiindcă P este el însuşi un predicat, expresia $P(P)$ reprezintă o propoziţie care poate fi adevărată sau falsă. Un exemplu de predicat de predicate, pentru care $P(P)$ reprezintă o propoziţie adevărată, îl constituie negaţia predicatului $0(F)$ (”F nu are loc despre niciun obiect”), i.e., funcţia $\overline{0}(F)$, care este definită prin expresia $(Ex)F(x)$. $\overline{0}(\overline{0})$ este o abreviere pentru $(EF)\overline{0}(F)$, pentru care putem, în schimb, scrie $(EF)(Ex)F(x)$. De fapt, ultima formulă reprezintă o aserţiune adevărată, şi anume propoziţia ”Există un predicat F şi un obiect x astfel încât $F(x)$ are loc”.

Dimpotrivă, $0(0)$ este o propoziţie falsă. Căci, potrivit definiţiei lui 0 rezultă

$$0(0) \sim \overline{(EF)}(0(F)) \sim \overline{(EF)}\ \overline{(Ex)}F(x) \sim (F)(Ex)F(x).$$

Ultima expresie reprezintă propoziţia falsă că orice predicat are loc pentru cel puţin un obiect.

Acum, expresia $P(P)$ o putem înţelege ca un predicat de P. Acest predicat exprimă proprietatea unui predicat de a se aplica lui însuşi. Acest predicat de predicate îl vom denota cu $Pd(P)$ (îl citim ”P este predicabil”). Întrucât Pd, şi astfel şi $\overline{Pd}$ însuşi, este un predicat de predicate, rezultă că şi expresiile $Pd(\overline{Pd})$ şi $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ au un sens. Acum, fie $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ este adevărată, i.e., predicatul de predicate $\overline{Pd}$ se aplică lui însuşi şi deci $Pd(\overline{Pd})$ este adevărată; fie $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ nu este adevărată, i.e., predicatul $\overline{Pd}$ nu se aplică lui însuşi, caz în care $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ este adevărată. Rezultă aşadar că

$$Pd(\overline{Pd}) \sim \overline{Pd}(\overline{Pd}).$$

Aceasta este însă o contradicţie, pentru că o expresie logică nu poate fi niciodată echivalentă cu contradictoria ei.

Acest paradox a fost descoperit mai întâi de Russell. El se poate exprima însă şi în terminologia teoriei mulţimilor. În această teorie predicatului de predicate Pd îi corespunde mulţimea tuturor acelor mulţimi care nu se conţin ele însele ca element. Conceptual, această mulţime este una

contradictorie, deoarece potrivit propriei definiţii, ea aparţine propriilor ei elemente dacă şi numai dacă nu aparţine propriilor elemente.

Cel de-al doilea dintre paradoxurile aflate în discuţie era deja cunoscut în filosofia greacă. Forma sa cea mai simplă este următoarea: presupunem că cineva spune ”eu mint” sau, mai explicit, ”acum rostesc o propoziţie falsă”. Atunci această propoziţie este adevărată dacă ea este o propoziţie falsă şi este falsă dacă este o propoziţie adevărată.

Vom da acestui paradox o formulare ceva mai riguroasă. Cu $\mathfrak{P}$ vom denumi o anumită persoană iar cu t vom desemna un anumit interval temporal. În acest interval temporal presupunem că $\mathfrak{P}$ rosteşte propoziţia, ”Tot ceea ce $\mathfrak{P}$ spune în acest interval temporal t este fals”; iar în timpul t persoana $\mathfrak{P}$ nu mai spune nimic altceva. Această asumpţie, desigur, nu este una contradictorie, întrucât realizarea ei poate fi făcută intenţionat. Pentru a o exprima în simbolismul logic vom denota propoziţia de mai sus rostită de $\mathfrak{P}$ cu $\mathfrak{A}$, şi utilizăm simbolul predicativ $\mathrm{As}(X)$ cu semnificaţia ”X este asertată de $\mathfrak{P}$ în intervalul temporal t”, unde orice propoziţie poate fi luată ca valoare a argumentului X.

Prin intermediul acestui simbol vom putea, mai întâi, să redăm propoziţia $\mathfrak{A}$ prin formula

$$(X)(\mathrm{As}(X) \to \overline{X});$$

iar asumpţia noastră că $\mathfrak{P}$ în intervalul de timp t a rostit propoziţia $\mathfrak{A}$ şi nimic altceva poate fi exprimată prin cele două formule

$$\mathrm{As}(\mathfrak{A}); \quad (X)(\mathrm{As}(X) \to \equiv (\mathfrak{A}, X)).$$

Acum, o contradicţie se poate genera în următorul fel. În formula validă $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, pentru cel de-al doilea membru $\mathfrak{A}$ se substituie expresia $(X)(\mathrm{As}(X) \to \overline{X})$, care constituie redarea simbolică a propoziţiei $\mathfrak{A}$. Şi astfel rezultă

$$\mathfrak{A} \to (X)(\mathrm{As}(X) \to \overline{X}).$$

Aici, în acord cu regulile calculului nostru, cuantificatorul universal (X) poate fi omis, şi deci

$$\mathfrak{A} \to (\mathrm{As}(X) \to \overline{X}).$$

De aici, prin substituţie, se obţine

$$\mathfrak{A} \to (\mathrm{As}(\mathfrak{A}) \to \overline{\mathfrak{A}}).$$

Întrucât antecedenţii implicaţiilor pot fi permutaţi, această formulă se poate înlocui cu

$$\mathrm{As}(\mathfrak{A}) \to (\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}).$$

Întrucât $\mathrm{As}(\mathfrak{A})$ este o formulă adevărată, obţinem

$$\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}.$$

Pe de altă parte, şi $\overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}$ se poate demonstra. Căci are loc mai întâi

$$\overline{\mathfrak{A}} \to (\overline{X})(\mathrm{As}(X) \to \overline{X}),$$

aşadar

$$\overline{\mathfrak{A}} \to (EX)(\mathrm{As}(X)\&X).$$

Apoi, din formula presupus adevărată

$$(X)(\mathrm{As}(X) \to \equiv (\mathfrak{A}, X))$$

rezultă

$$(X)(\mathrm{As}(X)\&X \to \equiv (\mathfrak{A}, X)\&X)$$

iar din aceasta

$$(EX)(\mathrm{As}(X)\&X) \to (EX)(\equiv (\mathfrak{A}, X)\&X),$$

şi astfel se obţine

$$\overline{\mathfrak{A}} \to (EX)(\equiv (\mathfrak{A}, X)\&X).$$

Acum, prin semnificaţia identităţii, $\equiv (\mathfrak{A}, X)\&X \to \mathfrak{A}$ este o formulă adevărată. Din această formulă, prin Regula γ), se obţine

$$(EX)(\equiv (\mathfrak{A}, X)\&X) \to \mathfrak{A}.$$

Această formulă, în conjuncţie cu formula tocmai obţinută, dă

$$\overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}.$$

Din formulele demonstrate $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}$ şi $\overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}$ rezultă însă că atât $\mathfrak{A}$ cât şi $\overline{\mathfrak{A}}$ sunt formule adevărate, aşa că am ajuns într-adevăr la o contradicţie.

Vom da cum şi un al treilea paradox, care are multe versiuni diferite. O formă simplă a prezentării lui este următoarea. Orice act al denumirii unui anumit număr natural, fie că survine prin comunicarea unui simbol convenţional, fie prin indicarea unei proprietăţi care-l defineşte, necesită un anumit volum minimal de timp. Şi deci într-un volum finit de timp doar un număr finit de numere pot fi denumite de un număr finit de oameni. Pe de altă parte, există infinit de multe numere. Prin urmare, în mod sigur nu toate numerele vor fi denumite de oamenii care trăiesc pe pământ în secolul 20. Printre numerele nedenumite în secolul 20 există unul cel mai mic. Acum, acest număr a fost totuşi unul denumit în secolul 20, deoarece l-am definit prin proprietatea de a fi cel mai mic număr nedefinit în secolul 20. Rezultă, aşadar, existenţa unui număr care este atât denumit, cât şi nedenumit.

Pentru a face acest argument ceva mai precis, în vederea reprezentării lui în calculul nostru, vom înlocui conceptul denumirii cu un concept mai restrâns. Vom lua în considerare doar acele denumiri ale unui număr care au loc, în sensul simbolizării noastre logice, prin scrierea unei expresii pentru un predicat care defineşte numărul respectiv. Printr-un predicat care defineşte numărul x vom înţelege aici unul care are loc despre numărul x şi despre nimic altceva.[5] În acest fel ajungem la următoarea formulare a paradoxului:

Fie $\mathrm{Scr}(P)$ cu semnificaţia: proprietatea unui predicat P că dintre expresiile simbolizării logice, scrise în secolul 20, cel puţin una este o expresie pentru P. Simbolul $<(x, y)$ va fi utilizat, ca şi până acum, pentru predicatul "x este mai mic decât y", unde locurile pentru argumente ale acestui predicat se referă la domeniul numerelor întregi pozitive.

Apoi, expresia

$$P(x)\&(y)(P(y) \rightarrow \equiv (x, y)),$$

[5]Faptul că numerele se pot interpreta ca predicate de predicate nu trebuie luat în considerare în momentul de faţă.

care spune că x este definit prin predicatul P, o vom abrevia prin $\mathrm{Df}(P, x)$. Drept abreviere pentru

$$(EP)(\mathrm{Df}(P, x)\&\mathrm{Scr}(P))$$

va fi utilizat simbolul $\mathrm{Dsc}(x)$.

$\mathrm{Dsc}(x)$ înseamnă aşadar: "Printre expresiile simbolice scrise în secolul 20, cel puţin una constituie un predicat care defineşte x", sau, mai scurt spus, "x este definit simbolic cel puţin o dată în secolul 20". În fine, ca abreviere pentru expresia

$$\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&(y)(<(x, y) \rightarrow \mathrm{Dsc}(y)),$$

vom lua simbolul $\mathrm{Mds}(x)$, astfel încât, corespunzător, $\mathrm{Mds}(x)$ înseamnă: "x are proprietatea de a fi cel mai mic număr nedefinit simbolic în secolul 20".

Drept axiome, vom introduce următoarele formule; mai întâi expresiile pentru proprietăţile de bază ale relaţiei $<(x, y)$:

$$(x)\overline{<(x, x)},$$

$$(x)(y)(z)(<(x, y)\&<(y, z) \rightarrow <(x, z)),$$

$$(x)(y)(\equiv(x, y)\vee<(x, y)\vee<(y, x)),$$

$$(Ex)P(x) \rightarrow (Ex)[P(x)\&(y)(<(y, x) \rightarrow \overline{P}(y))].$$

Dintre aceste patru axiome, primele trei înseamnă că relaţia $<(x, y)$ *ordonează* numerele întregi, iar ultima, că aceste numere sunt *bine-ordonate*. De-ndată avem ca axiome expresia simbolică pentru faptul că nu toate numerele pot fi definite simbolic în secolul 20,

$$(Ex)\overline{\mathrm{Dsc}}(x),$$

şi, în fine, formula $\mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})$, care spune că o expresie pentru $\mathrm{Mds}(x)$ a fost scrisă în secolul 20, şi care este deci o afirmaţie adevărată, fiindcă mai înainte am scris expresia pentru $\mathrm{Mds}(x)$.

Putem acum construi următorul argument formal. În formula

$$(Ex)P(x) \rightarrow (Ex)[P(x)\&(y)(<(y, x) \rightarrow \overline{P}(y))]$$

substituim $\overline{\mathrm{Dsc}}$ pentru P şi obţinem

$$(Ex)\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \to (Ex)[\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&(y)(<(y,x) \to \mathrm{Dsc}(y))].$$

Întrucât $(Ex)\overline{\mathrm{Dsc}}(x)$ este adevărată, rezultă

$$(Ex)[\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&(y)(<(y,x) \to \mathrm{Dsc}(y))],$$

şi deci dacă aplicăm abrevierea $\mathrm{Mds}(x)$, obţinem

$$(Ex)\mathrm{Mds}(x).$$

Dată fiind definiţia pentru Mds, următoarea relaţie are loc

$$\mathrm{Mds}(x) \to \overline{\mathrm{Dsc}}(x).$$

Apoi, cu ajutorul axiomelor de mai sus următoarea formulă se poate deriva

$$\mathrm{Mds}(x) \to \mathrm{Mds}(x)\&(y)(\mathrm{Mds}(y) \to \equiv (x,y)),$$

adică

$$\mathrm{Mds}(x) \to \mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x).$$

Din ultima şi antepenultima formulă rezultă

$$\mathrm{Mds}(x) \to \overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&\mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x).$$

Apoi, prin regula asociată Teoremei 34, se obţine

$$(Ex)\mathrm{Mds}(x) \to (Ex)(\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&\mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x)).$$

Întrucât $(Ex)\mathrm{Mds}(x)$ este demonstrată, prin Regula detaşării obţinem

$$(Ex)(\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&\mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x).$$

Dacă la această formulă se adaugă formula menţionată ca axiomă Scr(Mds), atunci rezultă

$$(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&\mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x)\&\mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})\}.$$

Acum, în acord cu Axioma f), următoarea formulă are loc

$$F(Q) \to (EP)F(P).$$

Dacă aici vom înlocui Q cu Mds iar $F(P)$ cu

$$(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&\mathrm{Df}(P,x)\&\mathrm{Scr}(P)\},$$

atunci obţinem

$$(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&\mathrm{Df}(\mathrm{Mds},x)\&\mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})\} \to \\ \to (EP)(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&\mathrm{Df}(P,x)\&\mathrm{Scr}(P)\},$$

şi astfel, dat fiind faptul că antecedentul este o formulă deja demonstrată, derivăm

$$(EP)(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&\mathrm{Df}(P,x)\&\mathrm{Scr}(P)\}.$$

Întrucât cuantificatorii pot fi permutaţi, iar

$$(EP)(A\&F(P)) \sim A\&(EP)F(P),$$

se obţine

$$(Ex)\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&(EP)(\mathrm{Df}(P,x)\&\mathrm{Scr}(P))\}.$$

Prin utilizarea abrevierii Dsc, această expresie se transformă în

$$(Ex)(\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\&\mathrm{Dsc}(x)).$$

Pe de altă parte, formula

$$(x)(\mathrm{Dsc}(x) \vee \overline{\mathrm{Dsc}}(x))$$

poate fi de asemenea demonstrată, dat fiind faptul că această formulă rezultă din Teorema 21 prin substituţie. Însă, prin Principiul Dualităţii, ultimele două formule sunt una contradictoria celeilalte. Am derivat astfel o contradicţie.

Aceste variate contradicţii nu le putem însă tolera, în sensul că acceptăm ca fapt demonstrabilitatea anumitor propoziţii reciproc contradictorii. Căci de-ndată ce admitem oricare două expresii reciproc contradictorii $\mathfrak{A}$ şi $\overline{\mathfrak{A}}$ ca formule adevărate, întregul calcul, aşa cum am observat mai sus, devine fără sens.

Să vedem acum ce consecinţe rezultă din paradoxuri pentru construcţia calculului nostru. Primul paradox arată clar că nu putem utiliza un concept nediferenţiat al predicatului, de genul celui descris la

începutul acestui paragraf, întrucât admiterea sa ar genera o contradicţie în calculul predicatelor. Celelalte două paradoxuri, pe care le-am inclus aici doar de dragul completitudinii, au un alt caracter. Ele arată doar incompatibilitatea anumitor aserţiuni. În primul caz acestea erau

$$\mathrm{As}[(X)(\mathrm{As}(X) \to \overline{X})] \quad \text{şi} \quad (X)[\mathrm{As}(X) \to\equiv (X, (Y)(\mathrm{As}(Y) \to \overline{Y}))];$$

iar în cel de-al doilea caz

$$(Ex)\overline{\mathrm{Dsc}}(x), \quad \mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})$$

şi

$$(P)\{(Ex)P(x) \to (Ex)[P(x)\&(y)(<(y,x) \to P(y))]\}.$$

Niciuna dintre aceste aserţiuni nu reprezintă o formulă universal validă. Paradoxurile de acest al doilea gen, numite uzual "*paradoxuri semantice*", nu afectează aşadar nicidecum calculul nostru, fiindcă acest calcul nu este în stare să exprime caracterul lor pur logic. Mai degrabă, pentru formalizarea lor parţială a trebuit să apelăm la o suită de idei intuitive. De aceea din contradicţiile de ultimul tip nu trebuie să tragem niciun fel de consecinţe pentru calculul nostru, motiv pentru care nici nu le vom mai detalia în cele ce urmează.[6]

5. Calculul predicatelor de ordin ω

Acum e vorba de construcţia sistematică a calculului extins prin introducerea predicatelor de ordin mai înalt. Consideraţiile paragrafului precedent ne-au arătat că nu putem utiliza un concept nediferenţiat al adevărului şi că predicatele trebuie deosebite după genul argumentelor lor. În calculul nostru acest lucru este sesizabil în faptul o variabilă predicativă comună o putem utiliza doar pentru predicate de acelaşi tip.

Avem mai întâi predicate de indivizi, clasificate în categorii sau tipuri în funcţie de numărul argumentelor lor. Astfel de predicate se numesc

[6]Pentru o tratare mai nouă a paradoxurilor semantice, comp., de exemplu, A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Studia Philosophica, Lwow 1935.

predicate de ordinul întâi. Printr-un *predicat de ordinul doi* înţelegem un predicat ale cărui locuri pentru argumente sunt ocupate cu indivizi sau predicate de ordinul întâi, unde cel puţin o dată trebuie să apară ca argument un predicat de ordinul întâi. Categoriile sau tipurile predicatelor de ordinul doi sunt deosebite după numărul şi genul locurilor lor pentru argumente. Similar, se poate mai departe ajunge la *predicate de ordinul trei, patru* ş.a.m.d. Pentru variabile individuale vom utiliza din nou minusculele latine iar pentru variabilele predicative majusculele latine. Pentru fiecare variabilă predicativă introdusă trebuie specificat exact, de la bun început, tipul ei, întrucât regulile substituţiei sunt formulate în aşa fel încât pentru o variabilă pot fi substituite doar predicate care sunt de acelaşi tip ca această variabilă.

Pentru a specifica în mod concis tipul unei variabile predicative, ne vom sluji de un simbolism simplu. Tipul unei variabile individuale îl vom denota cu i. Dacă avem o variabilă predicativă cu n locuri pentru argumente iar argumentele aferente au tipurile $a_1, a_2, \ldots, a_n$, atunci $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ denotă tipul variabilei predicative. De exemplu, $((i,i),i)$ indică tipul unui predicat diadic de ordinul doi, în care primul argument este un predicat diadic de indivizi iar al doilea argument este un individ. Dintre predicatele menţionate în §2 al acestui capitol, Sim are tipul $((i,i))$, $0(F)$ are tipul $((i))$, $\mathfrak{N}(\Phi)$ are tipul $(((i)))$, Imp are tipul $((i),(i))$ ş.a.m.d.

Această construcţie ierarhică a predicatelor şi calculul bazat pe ea a fost introdusă în logică de Whitehead şi Russell în lucrarea lor fundamentală *Principia Mathematica.* În afara diferenţierii după tip a predicatelor, mai sus descrisă, aşa numita *teorie simplă a tipurilor logice*, autorii utilizează şi o clasificare mai fină a predicatelor, *teoria ramificată a tipurilor.* Potrivit acestei teorii, de exemplu, nu mai este posibil să admitem un singur tip pentru predicatele de indivizi monadice, ci predicatele de indivizi trebuie deosebite după modul definirii lor. De exemplu, un predicat de indivizi, definit cu orice cuantificatori universali sau existenţiali pentru predicate, va avea un tip mai înalt decât predicatele de indivizi de

cel mai simplu ordin, numite de Whitehead şi Russell predicate de indivizi "predicative". Această teorie ramificată a tipurilor a fost elaborată pentru a lua în considerare paradoxurile semantice. Teoria este însă inutilă întrucât, aşa cum am văzut, acest gen de contradicţie nu priveşte calculul extins al predicatelor. Mai mult, ea implică un mare număr de dificultăţi, la care ne-am referit mai îndeaproape în prima ediţie a acestei cărţi. Pentru noi nu mai există niciun motiv să ne îndeletnicim mai detaliat cu această teorie, mai cu seamă fiindcă consistenţa calculului simplu de ordin ω poate fi stabilită fără dificultăţi.

Dacă ne orientăm acum spre detaliile construcţiei calculului de ordin ω, ne întâmpină o anumită dificultate cu privire la notaţie. Faptul că un predicat are loc despre anumite argumente l-am exprimat până acum întotdeauna punând argumentele, separate prin virgule, într-o paranteză care succede simbolul pentru predicat. Dacă locurile pentru argumente ale variabilelor predicative sunt ocupate doar de variabile, atunci această notaţie este suficientă şi acum. Altfel stau însă lucrurile dacă predicate speciale sunt substituite în locurile pentru argumente. Fie, de exemplu, F o variabilă predicativă de tipul $((i))$, al cărui loc pentru argument este aşadar definit pentru predicate de indivizi monadice. Fie apoi G o variabilă pentru predicate de indivizi diadice. Din G se pot construi următoarele predicate de variabila x: $G(x,x)$, $G(x,y)$, $G(y,x)$, unde ultimele două predicate conţin parametrul y. Nu suntem în stare să exprimăm direct, fără alte consideraţii, faptul că F are loc despre vreunul din aceste predicate. Căci dacă am scrie, de exemplu, $F(G)$, atunci n-ar fi clar care din predicatele monadice este vizat prin G. Cel mai simplu este să apelăm la o perifrază. Să introducem o variabilă H de tipul (i). Atunci formulele

$$(EH)(F(H)\&(x)(H(x) \sim G(x,x))),$$

$$(EH)(F(H)\&(x)(H(x) \sim G(x,y))),$$

$$(EH)(F(H)\&(x)(H(x) \sim G(y,x))),$$

sau formulele

$$(H)((x)(H(x) \sim G(x,x)) \to F(H)),$$
$$(H)((x)(H(x) \sim G(x,y)) \to F(H)),$$
$$(H)((x)(H(x) \sim G(y,x)) \to F(H)),$$

pot fi luate drept înlocuitor pentru lipsa posibilităţii de a exprima faptul că F are loc pentru cele trei predicate menţionate mai sus.

Există, fireşte, şi posibilitatea de a construi formalismul în aşa fel încât o putem scoate la capăt şi fără o perifrază de acest gen. Avantajul este atunci că Regula Substituţiei pentru variabilele predicative (analogonul Regulii $\alpha3$) a calculului restrâns al predicatelor) nu este pierdută, iar construcţia axiomatică a calculului de ordin ω se poate face într-un mod cu totul analog construcţiei calculului restrâns al predicatelor, familiară nouă. Pentru aceasta, va trebui însă să luăm în consideraţie o complicare a notaţiei. În cazul mai sus menţionat putem proceda în aşa fel încât variabilei F îi ataşăm o variabilă individuală, de exemplu x, drept index. Atunci prin

$$F_x(G(x,x)); \quad F_x(G(x,y)); \quad F_x(G(y,x))$$

vom avea expresia simbolică pentru cele trei propoziţii menţionate. În cele trei formule variabila x este o variabilă legată, şi deci poate fi înlocuită printr-o altă variabilă de acelaşi gen. De exemplu, formulele

$$F_z(G(z,z)); \quad F_z(G(z,y)); \quad F_z(G(y,z))$$

au acelaşi sens ca formulele de mai sus.

Dacă această notaţie cu indecşi vrem s-o folosim ca notaţie generală, atunci fiecare variabilă predicativă de ordinul doi sau de un ordin superior trebuie să aibă un index. Fie F o variabilă n-adică de acest gen. Fie $G_1, G_2, \ldots, G_n$ variabile care pot figura ca argumente ale lui F. Dacă printre ele apar şi variabile individuale, atunci acestea vor fi omise.

Fie

$$H_{11}, \ldots, H_{1i_1}; \quad H_{21}, \ldots, H_{2i_2}; \ldots; \quad H_{n_1}, \ldots, H_{ni_n}$$

variabile astfel încât $H_{k1}, \ldots, H_{ki_k}$ pot fi luate în considerare ca argumente ale G_k. Atunci F obţine indexul

$$F_{H_{11}, \ldots, H_{1i_1}; \quad H_{21}, \ldots, H_{2i_2}; \ldots; \quad H_{n1}, \ldots, H_{ni_n}}.$$

Acelaşi lucru este valabil pentru simbolurile de predicate individuale. Vom da câteva exemple. În loc de $\mathrm{Sim}(R)$ ar trebui acum să scriem $\mathrm{Sim}_{xy}R(x, y)$, în loc de $\mathrm{Imp}(F, G)$, $\mathrm{Imp}_{xy}(F(x), G(y))$. Iar în locul formulei utilizate în §2, $\mathfrak{N}(\Phi)$, ar trebui să scriem $\mathfrak{N}_F\Phi(F)$, unde F are tipul (i). Aşa cum se vede de aici, formalismul prin notaţia cu indecşi este încărcat în mod considerabil. De aceea în cele ce urmează vom adopta notaţia mai simplă şi doar ocazional ne vom referi la notaţia cu indecşi.

Ne îndreptăm acum atenţia asupra sistemului axiomatic pentru formulele universal valide. Mai întâi trebuie să definim conceptul de formulă. Acest lucru se poate face în acelaşi mod în care am procedat mai înainte pentru calculul restrâns al predicatelor, prin Regulile 1)-5) ale Capitolului 3, §4. Trebuie doar să avem în vedere că acum avem mai multe genuri de variabile. Cât priveşte sistemul axiomatic însuşi, fireşte nu se poate elabora niciun sistem care să livreze, fără excepţie, toate formulele universal valide.[7] Cu toate acestea, sistemul axiomatic care urmează cu greu ar putea da vreodată rateuri, chiar şi în tipurile de inferenţă complicate, aşa cum sunt ele utilizate, de exemplu, în analiza matematică (comp. consideraţiile următorului paragraf). În esenţă, acest sistem este doar o generalizare a sistemului elaborat mai înainte pentru calculul restrâns al predicatelor.

Construcţia acestui sistem este următoarea:

I. Mai întâi, vom folosi din nou, ca formule primitive, formulele a)-d) ale calculului propoziţional, date în Capitolul 3, §5.

II. Formulelor primitive e) şi f) ale calculului restrâns al predicatelor le corespunde următoarea regulă de construcţie a formulelor primitive: Fie G şi H variabile de un tip arbitrar a, iar F una de tipul (a). Atunci

[7] Acest lucru rezultă din lucrarea lui K. Gödel, citată deja în §1 al acestui capitol.

orice formulă

$$(\mathrm{II}, 1) \qquad (G)F(G) \rightarrow F(H)$$

şi orice formulă

$$(\mathrm{II}, 2) \qquad F(H) \rightarrow (EG)F(G)$$

este o formulă primitivă. (Cazul în care G este de tipul i, i.e., este o variabilă individuală, este inclus aici.)

III. Vin apoi, ca grupă specială pentru calculul extins al predicatelor, axiomele care corespund axiomei alegerii din teoria mulţimilor, şi care sunt o generalizare a Axiomei g) stabilită deja anterior pentru calculul de ordinul doi. Fie F o variabilă de orice tip a, G şi L variabile de orice tip b, A şi H variabile de tipul (a, b) iar T o variabilă de tipul (b). Atunci

$$(\mathrm{III}) \qquad (EH)\{(F)[(EG)A(F,G) \rightarrow (EG)(H(F,G)\&A(F,G))]\&$$

$$\&(F)(G)(L)[(H(F,G)\&H(F,L)) \rightarrow (T)(T(G) \sim T(L))]\}$$

este o formulă primitivă.

IV. Fie apoi $L_1, L_2, \ldots, L_n$ variabile de tipurile $b_1, b_2, \ldots, b_n$, G şi H variabile de tipul $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ iar A o variabilă de tipul $((b_1, b_2, \ldots, b_n))$. Atunci

$$(\mathrm{IV}) \qquad (L_1)\ldots(L_n)[G(L_1,\ldots,L_n) \sim H(L_1,\ldots,L_n)] \rightarrow$$

$$\rightarrow (A(G) \rightarrow A(H))$$

este o formulă primitivă. (Aceste "axiome ale extensionalităţii" corespund condiţiei de identitate din teoria mulţimilor.)

Regulile pentru deducţia de noi formule sunt analoge celor din calculul predicatelor. $\alpha1$) şi β) rămân neschimbate. Regulile $\alpha2$), $\gamma1$) şi $\gamma2$) trebuie corespunzător modificate, având în vedere faptul că acum apar mai multe tipuri de variabile. Extensia Regulii $\alpha2$) nu poate fireşte compensa integral Regula precedentă $\alpha3$). Sistemul formulelor primitive trebuie aşadar extins încă în următorul mod.

Fie $G_1, G_2, \ldots, G_n$ variabile de tipurile $a_1, a_2, \ldots, a_n$, F o variabilă de tipul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{A}(G_1, \ldots, G_n)$ o formulă care conţine variabilele libere $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Atunci orice formulă de forma

$$\text{(V)} \qquad (EF)(G_1)\ldots(G_n)(F(G_1, \ldots, G_n) \sim \mathfrak{A}(G_1, \ldots, G_n))$$

este o formulă primitivă. Aceste formule (V) au scopul de a înlocui în deducţii o formulă cu variabile libere, care reprezintă un predicat individual, cu o variabilă predicativă.

Dacă se utilizează notaţia cu indecşi, atunci formulele (V), pentru care numele uzual este "axioma comprehensiunii", pot fi omise. În acest caz, la regulile de deducţie se adaugă generalizarea Regulii $\alpha 3$), a calculului restrâns al predicatelor. Şi astfel formulele (V) sunt demonstrabile.

O altă cale decât cea parcursă până acum pentru construcţia calculului de ordin ω constă în aceea că în construcţia formală se consideră în principiu doar predicate monadice de diferite ordine. Căci, după Kuratowski,[8] de exemplu, un predicat de indivizi diadic poate fi văzut ca un predicat monadic în domeniul perechilor ordonate (x, y). Perechea ordonată (x, y) este definită (dacă, din comoditate, adoptăm aici modul de exprimare set-teoretic) ca mulţimea care conţine ca elemente doar următoarele două mulţimi: mulţimea cu x ca singurul ei element şi mulţimea cu x şi y ca singurele ei elemente. Pentru definiţia acestor mulţimi, respectiv a predicatelor corespunzătoare lor, este necesar doar predicatul diadic al identităţii, care se poate reduce însă, din nou, la predicate monadice (comp. §1 al acestui capitol). Noi n-am urmat această cale aici în calculul de ordin ω, fiindcă în această construcţie un predicat de indivizi, care altminteri este de ordinul întâi, apare ca predicat de un ordin relativ înalt. În rest însă limitarea la predicate monadice are multe avantaje formale.

---

[8] C. Kuratowski, *Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensambles*, Fundam. Math., Vol. 2(1921).

Consistenţa calculului de ordin ω se poate demonstra într-un mod simplu, printr-o extensie a procedurii aplicate în Capitolul 3, §9.[9]

6. Aplicaţii ale calculului de ordin ω

Calculul de ordin ω poate fi utilizat pentru derivarea consecinţelor din axiomele unei teorii date, în acelaşi mod în care a fost elaborat în detaliu pentru calculul restrâns al predicatelor, în Cap. 3, §11. Comparativ cu calculul restrâns al predicatelor, vom avea o capacitate sporită de expresie, în raport cu axiomele şi consecinţele. Această aplicaţie a calculului de ordin ω o vom ilustra printr-un exemplu.

Pentru aceasta vom lua *fundamentele teoriei numerelor reale.* Aici numerele reale nu vor fi introduse printr-un sistem axiomatic propriu, ci vor fi reduse la numerele raţionale. Vom lua aşadar numerele raţionale ca sistem al obiectelor domeniului de indivizi şi considerăm ca fiind introduse axiome adecvate pentru relaţiile aritmetice de bază din domeniul numerelor raţionale, precum adunarea, scăderea, relaţia "a fi mai mare decât" ş.a.m.d. În matematică sunt utilizate diferite metode pentru reducerea numerelor reale la numerele raţionale. De exemplu, un număr real se poate defini cu ajutorul unui şir fundamental Cantor, sau printr-o fracţie binară, respectiv zecimală infinită. Pentru conexiunea cu logica cea mai recomandată este metoda Dedekind.

După Dedekind, un număr real îl definim ca o "tăietură", i.e., ca o diviziune a numerelor raţionale în două clase cu următoarele "proprietăţi ale tăieturii":

1. Fiecare dintre cele două clase conţine cel puţin *un* număr raţional.
2. În prima clasă nu există niciun cel mai mare număr raţional.

---

[9]Cf. A. Tarski, *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit*, Mh. Math. Physik. Vol. 40(1933), şi G. Gentzen, *Die Widerspruchfreiheit der Stufenlogik*, Math. Z. Vol. 41(1936). Gentzen utilizează construcţia calculului de ordin ω, tocmai discutată, în care apar doar predicate monadice. Transferarea metodei sale la sistemul nostru axiomatic nu generează însă niciun fel de dificultăţi speciale.

3. Dacă un număr raţional aparţine primei clase, atunci toate numerele raţionale mai mici aparţin de asemenea primei clase.

Acum, într-o diviziune de felul tocmai descris trebuie să considerăm întotdeauna doar prima dintre cele două clase, şi astfel vom avea de-a face cu o mulţime de numere raţionale, care se poate reprezenta cu ajutorul unui predicat care-o defineşte.

Printr-un număr real vom înţelege acum o mulţime de numere raţionale pentru care există un predicat care-o defineşte şi care satisface următoarele trei condiţii:

1. $(Ex)P(x)\&(Ex)\overline{P}(x)$.

("Ambele clase definite prin $P(x)$ şi prin $\overline{P}(x)$ sunt nevide.")

2. $(x)\{P(x) \rightarrow (Ey)(<(x,y)\&P(y))\}$.

("Pentru orice număr raţional care are proprietatea P, există unul mai mare care de asemenea are proprietatea P.")

3. $(x)\{P(x) \rightarrow (y)(<(y,x) \rightarrow P(y))\}$.

("Dacă x are proprietatea P, atunci toate numerele raţionale y mai mici au de asemenea proprietatea P.")

Aceste trei condiţii laolaltă – ni le putem reprezenta ca fiind legate prin simbolul & – constituie "proprietatea tăieturii", cu referire la un predicat. Această proprietate a unui predicat o vom denota cu Tăiet(P). Două predicate P şi Q, cu proprietăţile Tăiet(P) şi Tăiet(Q), reprezintă acelaşi număr real dacă şi numai dacă mulţimile care corespund lui P şi Q sunt identice, i.e., dacă Echiv(P,Q) are loc.

Putem acum introduce mai întâi relaţia de ordine dintre numerele reale. Pentru două predicate P, Q cu proprietatea Tăiet, $\leq (P,Q)$ va însemna acelaşi lucru ca Imp(P,Q), i.e., ca

$$(x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

sau, simbolic

$$\text{Tăiet}(P)\&\text{Tăiet}(Q) \rightarrow (\text{Imp}(P,Q) \sim\leq (P,Q)).$$

Propoziţia $<(P, Q)$ va fi atunci definită prin

$$\text{Tăiet}(P)\&\text{Tăiet}(Q) \to (<(P, Q) \sim (\text{Imp}(P, Q)\&\overline{\text{Echiv}}(P, Q))).$$

Se poate apoi demonstra în calcul că ambele relaţii, $\leq (P, Q)$ şi $<(P, Q)$, sunt tranzitive. Similar, toate celelalte proprietăţi, caracteristice pentru o relaţie de ordine, se pot deriva.

Adiţia şi multiplicarea numerelor reale se pot reduce la cele ale numerelor raţionale. Predicatul

$$(Ey)(Ez)(P(y)\&Q(z)\&x = y + z)$$

reprezintă suma iar predicatul

$$(Ey)(Ez)(P(y)\&Q(z)\&x = y \cdot z)$$

reprezintă produsul numerelor reale definite prin P şi Q. (Aici $x = y + z$ şi $x = y \cdot z$ reprezintă predicate triadice fundamentale în domeniul numerelor raţionale.)

Putem acum introduce, în mod uzual, conceptele de *mărginire* şi cel de *limită superioară* a unei mulţimi de numere reale. O mulţime de numere reale este dată printr-un predicat de predicate $A(P)$, care satisface condiţia:

$$(P)(A(P) \to \text{Tăiet}(P))\&(P)(Q)((A(P)\&\text{Echiv}(P, Q)) \to A(Q)).$$

Faptul că o mulţime $A(P)$ de numere reale este mărginită superior înseamnă că există un număr real care este mai mare sau egal cu orice număr al mulţimii; în simboluri

$$(EP)\{\text{Tăiet}(P)\&(Q)(A(Q) \to \leq (Q, P))\},$$

pe care o vom reda abreviat prin $(EP)\text{Mar}(P, A)$; în cuvinte, există un număr P care constituie o margine superioară a mulţimii A.

Vom presupune şi că $A(P)$ conţine cel puţin un element, aşadar că are loc următoarea formulă:

$$(EP)A(P).$$

Teorema cu privire la limita superioară se poate formula acum astfel: *Dacă o mulţime de numere reale are o margine superioară, atunci ea are şi o cea mai mică margine superioară.**

Demonstraţia matematică a existenţei limitei superioare, adusă în forma ei cea mai simplă, constă în aceea că pentru mulţimea considerată de numere reale, care este o mulţime de mulţimi de ordinul întâi, se formează reuniunea. În acord cu remarcile din §3 al acestui capitol, reuniunea asociată cu $A(P)$ se redă prin predicatul

$$(EP)(P(x)\&A(P)).$$

Vom abrevia acest predicat prin $\mathrm{Re}(x, A)$.

Despre predicatul $\mathrm{Re}(x, A)$ trebuie aşadar arătat că el reprezintă un număr real care constituie limita superioară a mulţimii A.

În primul rând, trebuie să arătăm că mulţimea definită prin $\mathrm{Re}(x, A)$ este într-adevăr un număr real.

Mai întâi se poate uşor arăta că cele trei proprietăţi, reunite în Tăiet, sunt valabile pentru Re. Să dăm derivarea pentru prima proprietate.

Din

$$(EP)A(P),$$

$$(P)(A(P) \to \mathrm{Tăiet}(P))$$

se conchide

$$(EP)(\mathrm{Tăiet}(P)\&A(P)).$$

Întrucât

$$\mathrm{Tăiet}(P) \to (Ex)P(x)$$

are loc, vom avea

$$(EP)((Ex)P(x)\&A(P)).$$

---

*În terminologia din ediţia a VI-a a lucrării *Principiile Logicii Matematice*, "limita superioară" este "cea mai mică margine superioară"; comp. D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Sechste Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 176. Şi deci teorema are următoarea formulare: "Dacă o mulţime nevidă de numere reale are o margine superioară, atunci ea are şi o limită superioară, i.e., o cea mai mică margine superioară."

Ultima formulă se poate transforma în

$$(Ex)(EP)(P(x)\&A(P)),$$

i.e.,

$$(Ex)\mathrm{Re}(x, A).$$

Similar se poate arăta că

$$(Ex)\overline{\mathrm{Re}}(x, A), \quad \text{i.e.,} \quad (Ex)\overline{(EP)}(P(x)\&A(P)).$$

Această formulă se poate transforma mai întâi în

$$(Ex)(P)(A(P) \rightarrow \overline{P}(x)).$$

Prin asumpţia mărginirii mulţimii A, vom avea

$$(EP)\{\text{Tăiet}(P)\&(Q)(A(Q) \rightarrow \leq (Q, P))\}.$$

Apoi, are loc

$$\text{Tăiet}(P) \rightarrow (Ex)\overline{P}(x).$$

Aşadar,

$$(EP)\{(Ex)\overline{P}(x)\&\text{Tăiet}(P)\&(Q)(A(Q) \rightarrow \leq (Q, P))\}.$$

Din definiţia lui $\leq (Q, P)$ rezultă cu uşurinţă

$$\leq (Q, P)\&\text{Tăiet}(Q)\&\text{Tăiet}(P) \rightarrow (x)(\overline{P}(x) \rightarrow \overline{Q}(x)).$$

Formula

$$(Q)(A(Q) \rightarrow \leq (Q, P))$$

poate fi aşadar înlocuită în penultima formulă prin

$$(Q)[A(Q) \rightarrow (x)(\overline{P}(x) \rightarrow \overline{Q}(x))]$$

sau prin

$$(x)(\overline{P}(x) \rightarrow (Q)(A(Q) \rightarrow \overline{Q}(x))).$$

Din formula

$$(EP)\{(Ex)\overline{P}(x)\&\text{Tăiet}(P)\&(x)[\overline{P}(x) \rightarrow (Q)(A(Q) \rightarrow \overline{Q}(x))]\}$$

vom obţine

$$(Ex)(Q)(A(Q) \rightarrow \overline{Q}(x))$$

i.e.,

$$(Ex)\overline{\mathrm{Re}}(x, A).$$

Şi astfel, prima proprietate a tăieturii este demonstrată pentru $\mathrm{Re}(x, A)$.

Într-un mod analog se demonstrează proprietăţile 2 şi 3 pentru $\mathrm{Re}(x, A)$; şi deci Tăiet(Re) are loc.

Vom arăta acum

$$(P)(A(P) \rightarrow \leq (P, \mathrm{Re})),$$

i.e., *numărul real care corespunde lui* Re *este o margine superioară pentru mulţimea definită prin* $A(P)$.

Dacă pentru Re şi $\leq$ substituim expresiile care le definesc, atunci această formulă se transformă în

$$(P)(A(P) \rightarrow (x)[P(x) \rightarrow (EQ)(Q(x)\&A(Q))]),$$

şi care poate fi transformată în

$$(P)(x)(A(P)\&P(x) \rightarrow (EQ)(A(Q)\&Q(x))).$$

Această ultimă formă ne dă posibilitatea să recunoaştem formula ca o aplicaţie a Axiomei (II,2) (§5, mai sus).

Mai rămâne să arătăm că $\mathrm{Re}(x, A)$ este *cea mai mică* margine superioară, sau, simbolizat:

$$(P)\{[\text{Tăiet}(P)\&(Q)(A(Q) \rightarrow \leq (Q, P))] \rightarrow \leq (\mathrm{Re}, P)\}.$$

Dacă, din nou, vom înlocui aici toate abrevierile cu definiţiile lor, atunci vom obţine

$$(P)\{[\text{Tăiet}(P)\&(Q)(A(Q) \rightarrow (x)(Q(x) \rightarrow P(x)))] \rightarrow$$
$$\rightarrow (y)[(EP')(P'(y)\&A(P')) \rightarrow P(y)]\}.$$

Aici, cuantificatorul universal (x) se poate muta spre stânga, şi astfel se obţine

$$(P)\{[\text{Tăiet}(P)\&(x)(Q)(A(Q)\&Q(x) \rightarrow P(x))] \rightarrow$$
$$\rightarrow (y)(EP')(P'(y)\&A(P') \rightarrow P(y))\}.$$

Această formulă o putem demonstra cu ajutorul generalizării Teoremei 22 (Cap. 3, §6).

Exemplele date ar putea fi suficiente pentru a arăta că calculul de ordin ω este mijlocul adecvat pentru a exprima tipurile de inferenţă din analiza matematică. O construcţie completă a fundamentelor matematicii cu ajutorul calculului de ordin ω a fost dată de Whitehead şi Russell,[10] ale căror consideraţii au fost inutil complicate prin utilizarea teoriei ramificate a tipurilor, menţionată în §4. Totuşi, eliminarea acestei teorii din deducţiile autorilor nu ridică niciun fel de dificultăţi speciale.

[10]A.N. Whitehead, B. Russell, *Principia Mathematica*, 2nd ed. (Cambridge, 1925-1927).

Bibliografie

Dintre lucrările *introductive* de logică matematică, menţionăm următoarele:

- Behmann, H., *Mathematik und Logik*, Leipzig, 1927.
- Carnap, R., *Abriß der Logistik*, Wien, 1929.
- Couturat, L., *L'Algèbre de la Logique*, Paris, 1905.
- Lewis, C.I., Langford, C.H., *Symbolic Logic*, New York, 1932.
- Quine, W.V., *A System of Logistic*, Cambridge (Mass.), 1934.
- Russell, B., *Einführung in die mathematische Philosophie*, München, 1922.

Dintre lucrările *mai cuprinzătoare* pe această temă, menţionăm următoarele:

- Hilbert, D., Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, Vol. I şi II, Berlin, 1934 şi 1939.
- Whitehead, A.N., Russell, B., *Principia Mathematica*, 2nd ed., Vol. I (1925), II (1927) şi III (1927), Cambridge Univ. Press.

Dintre lucrările *mai vechi*, care prezintă interes, menţionăm următoarele:

- Frege, G., *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, 1879.
- — *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, 1884.
- — *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, Jena, 1893-1903.
- Peano, G., *Notations de logique mathématique; Introduction au Formulaire de Mathématiques*, Turin, 1894.

- — *Formulaire de Mathématiques*, 1895-1905.
- Pierce, C.S., *Collected Papers*, edited by C. Hartshorne, P. Weiss, Cambridge (Mass.).
- Schröder, E., *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*exakte Logik*), 3 vol., Leipzig, 1890-1905.

Pentru *problemele set-teoretice*, strâns conectate cu logica, trimitem la

- Fraenkel, A., *Einleitung in die Mengenlehre*, 3. Aufl., Berlin, 1928.

O listă completă a literaturii de specialitate cu profilul logică, listă foarte cuprinzătoare, nu poate fi dată aici.* Pentru o listă completă, ordonată cronologic, a întregii literaturi privitoare la logica matematică, până în anul 1935, trimitem la valoroasa lucrare

- Church, A., *A Bibliography of Symbolic Logic*, The Journal of Symbolic Logic, vol. I, pp. 121-218.

*O listă bibliografică extinsă cititorul o poate găsi în D. Hilbert, W. Ackermann, *Principiile logicii matematice*, Cluj-Napoca, 2024 (traducere făcută după ed. a VI-a a vol. D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 6. Aufl. Springer-Verlag, Berlin).

Index

Virgil Drăghici. Cadru didactic la Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca. Domenii de specialitate: Logica Matematică (Logici de ordinul întâi, D.Hilbert, K.Gödel, Logica Modală) si Filosofie Germană (Imm.Kant, E.Husserl, M.Heidegger, H.G.Gadamer). Nume cunoscut în mediul universitar, atât pe plan național cât și internațional, prin contribuțiile sale, atât ca autor de volume și articole științifice, cât și ca traducător. Dintre volumele sale menționăm: *LOGICA (tradițională/clasică/modală)*, Editura EFES, Cluj-Napoca, 2007, 337pp; *Logică și Adevăr – O expunere topo-logică a tematicii la E.Husserl și M.Heidegger*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2003, 165pp; *Logica Clasică*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2014, 136pp; *Mathematical Logic*, Presa Universitară Clujeană, 2023, 352pp. Este un cunoscut traducător de lucrări din domeniul logico-matematic, e.g., W. Stegmüller, *Incompletitudine și Indecidabilitate* (orig. Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit), Presa Universitară Clujeană, 2011; R.M.Smullyan, *Teoremele gödeliene de incompletitudine* (orig. Gödel's Incompleteness Theorems), Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2018; D.Hilbert-W.Ackermann, *Principiile Logicii Matematice* (orig. Grundzüge der theoretischen Logik, zweite, verbesserte Auflage, New York, Dover,1946) (lucrarea de față); D.Hilbert-W.Ackermann, *Principiile Logicii Matematice* (orig. Grundzüge der theoretischen Logik, Sechste Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1972), o reconstructie centrată pe sisteme tip Gentzen (în curs de apariție).

Actualmente Virgil Drăghici este conducător de doctorate la Universitatea Babeș-Bolyai (Școala Doctorală de Filosofie), în domeniile mai sus specificate: Logică Matematică si Filosofie Germană.



ISBN: 978-606-37-2151-9